

# 組合せ論的ベーテ仮説

(日本数学会 企画特別講演 2007年9月21日東北大学)

東京大学大学院 総合文化研究科 国場敦夫

## 1 序

20世紀を代表する物理学者の一人である Bethe (Hans Albrecht Bethe, 1906–2005) が Heisenberg 鎖の論文 [1] を発表したのは 1931 年である。それは量子多体問題の最初の厳密解であると同時に今日量子可積分系と呼ばれている分野が誕生した瞬間でもあった。原論文に “Wir machen den Ansatz” として波動関数が導入されているせいか、その方法は Bethe ansatz (Yang による命名は Bethe’s hypothesis) として以後広く普及し、今日でも威力を發揮し続けている。

Bethe の方法は 1 次元量子系の Hamiltonian, あるいは 2 次元古典スピン系の転送行列に対し、その固有値問題の解を、ある特徴的なフォーマットで与え、エネルギースペクトルや相関関数など様々な物理量の解析を可能にする [2, 3, 4]。原論文の定式化は、その後多くの研究により、「代数的」、「解析的」、「熱的」など、様々な形態の Bethe 仮説へと進化を遂げて現在に至っている。

「組合せ論的ベーテ仮説」(以下「組合せ Bethe 仮説」) はそうした中でも最も風変わりな、いわば「Bethe 仮説のなれの果て」とでも呼ぶべきヴァージョンである。それは Bethe 仮説の完全性の考察を背景として誕生し (2 節), Fermi 型指標公式, 任意のアフィン・リー環における  $X = M$  予想へと誘う (3 節)。一方で、2002 年頃から箱玉系と呼ばれる 1 次元可積分セルオートマトンの解析にも応用され、逆散乱形式 (4 節), 結晶基底 (5 節) や KP 方程式のtau関数の超離散化 (6 節) との関係も明らかになってきた。特に周期系では Jacobi 多様体や Riemann テータ関数の超離散類似が自然に導かれ、初期値問題の解の明示式も得られている (7 節)。このような展開を余り詳細に立ち入らずに紹介するのが本稿の目的である。

## 2 KKR 全単射

組合せ Bethe 仮説を創始したのは Kerov, Kirillov, Reshetikhin (KKR) [5, 6] であり、1980 年代中期のことである。その核心は、二つの組合せ論的对象物の 1 対 1 対応 (KKR 全単射)

$$\{\text{highest paths}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{rigged configurations}\} \quad (1)$$

にある<sup>1</sup>。これらは数学的に完璧に定義・証明される概念・定理であるが [7]、ここでは簡単な例でその雰囲気を紹介するに留め、Bethe 仮説からの由来について説明しよう。

正整数  $n$  を固定する。path とは文字  $1, 2, \dots, n$  の有限列  $b_1 b_2 \dots b_L$  であり、それが highest とは、任意の左側部分  $b_1 b_2 \dots b_k$  ( $1 \leq k \leq L$ ) における各文字の登場回数が  $\#1 \geq \#2 \geq \dots \geq \#n$  を満たすものをいう。例えば  $p = 11112221322433$  は長さ  $L = 14$  の highest path である ( $n = 4$ )。KKR 全単射は  $p$  を次の rigged configuration に写す。

<sup>1</sup>オリジナルの KKR 全単射は rigged configuration と ヤング標準盤の 1:1 対応である。後者を更に Robinson-Schensted (RS) 対応で highest path に翻訳したものが (1) である。

$$\begin{array}{cccc}
\mu^{(0)} & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} \\
(1^{14}) & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 0 \\ \hline & & & 2 \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

$n$  個のヤング図  $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n-1)}$  が並んでいる．特に  $\mu^{(0)}$  は path の長さ  $L$  により  $(1^L)$  と指定される．それ以外のヤング図  $\mu^{(a)}$  ( $1 \leq a \leq n-1$ ) の決まり方は非自明である． $\mu^{(a)}$  において，その長さ  $j$  の行の個数を  $m_j^{(a)}$  とし， $p_j^{(a)} = L\delta_{a,1} - \sum_{b=1}^{n-1} C_{a,b} \sum_{k \geq 1} \min(j,k)m_k^{(b)}$  とおく．ここで  $(C_{a,b})_{1 \leq a,b \leq n-1}$  は  $sl(n)$  の Cartan 行列である．このとき全ての  $a, j$  について  $p_j^{(a)} \geq 0$  となる場合に組  $(\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n-1)})$  を configuration という．

$\mu^{(0)}$  以外のヤング図の各行には整数が割り振られている．これを rigging と呼ぶ． $\mu^{(a)}$  の長さ  $j$  の行に割り振られた rigging  $r_1, r_2, \dots, r_{m_j^{(a)}}$  がみな区間  $[0, p_j^{(a)}]$  に入るとき，その並べ替えは同一視したものを rigged configuration といい，以下のように表記する．

$$(\mu, r) = (\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, r^{(1)}), \dots, (\mu^{(n-1)}, r^{(n-1)}))$$

不思議な定義が続いたが，これらは 1 次元  $sl(n)$  Heisenberg 模型の Bethe 仮説に由来している． $sl(n)$  の基本表現を  $V = \mathbb{C}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_n$  とし， $L$  重テンソル積  $V \otimes \dots \otimes V$  に働く Hamiltonian  $H = \sum_{k=1}^L (P_k - 1)$  を対角化せよ，という問題である．ここで， $P_k$  は  $k$  番目と  $k+1$  番目のサイトのスピンを入れ換える演算子  $P_k(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$  であり，周期的境界条件を仮定する．Bethe 仮説によると， $H$  の対角化は以下の方程式を解くことに帰着する．

$$\left( \frac{u_j^{(a)} + i\delta_{a,1}}{u_j^{(a)} - i\delta_{a,1}} \right)^L = - \prod_{b=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{N_b} \frac{u_j^{(a)} - u_k^{(b)} + iC_{a,b}}{u_j^{(a)} - u_k^{(b)} - iC_{a,b}} \quad (2)$$

これは未知数  $\{u_j^{(a)} \mid 1 \leq a \leq n-1, 1 \leq j \leq N_a\}$  についての連立方程式であり，Bethe 方程式と呼ばれる．Hamiltonian は  $sl(n)$  対称性  $[H, sl(n)] = 0$  を持つので，ウェイトを保存する． $N_1, \dots, N_{n-1}$  はこれを指定する非負整数（後述）であり，対応する  $V \otimes \dots \otimes V$  の部分空間での  $H$  の固有値は  $\sum_{j=1}^{N_1} \frac{-4}{(u_j^{(1)})^2 + 1}$  で与えられる．固有ベクトルも根  $\{u_j^{(a)}\}$  から定められ，Bethe ベクトルと呼ばれる．Bethe ベクトルは  $sl(n)$  の最高ウェイトベクトルになる [8]．

以上簡約すると，今の場合 Bethe 仮説とは，Bethe 方程式 (2) の根からスピン鎖の状態空間  $V \otimes \dots \otimes V$  における  $sl(n)$  最高ウェイトベクトルを作り出す処方箋である．

KKR 全単射 (1) はこれの組合せ論的な類似になっている．最高ウェイトベクトルに相当する対象物が highest path であり，Bethe 方程式の根に相当する対象物が rigged configuration である．後者についてもう少し説明しよう．一般に Bethe 方程式 (2) を解析的に解くことはできないが，その根  $\{u_j^{(a)}\}$  を各  $a$  ごとに複素平面上にプロットすると近似的に或るパターンをなす．それは  $x+3i, x+i, x-i, x-3i$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) のように実軸について対称に間隔  $2i$  で連なった「ストリング」の集団という様相を呈する．これを模式化したのが configuration であり，ヤング図  $\mu^{(a)}$  の各升目はひとつの Bethe 根  $u_j^{(a)}$  に，各行が一本のストリングに対応する． $m_j^{(a)}$  は長さ  $j$  のストリングの本数であり， $\mu^{(a)}$  の升目の総数  $\sum_{j \geq 1} jm_j^{(a)}$  は (2) の  $N_a$  に等しい．一方 rigging はストリングの「位置」を指定する．先の例の  $\mu^{(1)}$  では， $u_1^{(1)}, \dots, u_9^{(1)}$  が長さ 4, 3, 2 のストリングを形成し，それらが「位置」0, 2, 3 にあるような根という気持ちである<sup>2</sup>．物理的には各 Bethe 根はマグノンに，ストリングはその束縛状態に対応する．

<sup>2</sup>解がこのようなパターンで記述できるという仮説をストリング仮説という．一般には正しくないで「気持ち」としたが，KKR 全単射 (1) はストリング仮説の真偽とは独立に成立する．一方本来の意味での完全性の証明は未解決である

### 3 Fermi 公式

rigged configuration と highest path がそれぞれ Bethe 根と Bethe ベクトルの組合せ論的類似とするならば，両者が 1 対 1 対応するという定理 (1) は Bethe 仮説の完全性の類似に相当する．このことから麗しい数え上げ公式が従う．

highest path は テンソル積  $V \otimes \cdots \otimes V$  の既約成分と 1 対 1 対応するので，その数は既約分解の多重度と一致する．最高ウェイトがヤング図  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  で指定される  $sl(n)$  の既約表現  $V(\lambda)$  の多重度  $[V^{\otimes L} : V(\lambda)]$  は， $\lambda$  上の文字  $1, 2, \dots, L$  からなる標準盤の個数に等しく，Kostka 数  $K_{\lambda, (1^L)}$  と呼ばれる [9]．一方ストリングの本数  $m = \{m_j^{(a)}\}$  で指定される rigged configuration の数は順序を区別しない rigging  $r_1, \dots, r_{m_j^{(a)}}$  が区間  $[0, p_j^{(a)}]$  に入ることから

$$M(m) = \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{j \geq 1} \binom{p_j^{(a)} + m_j^{(a)}}{m_j^{(a)}} \quad (3)$$

となる．よって (1) において  $V(\lambda)$  に対応する部分集合の元を数えると，等式

$$[V^{\otimes L} : V(\lambda)] = \sum_m M(m) \quad (4)$$

が従う．ここで，右辺の和は  $\mu^{(a)}$  の昇目の総数  $\sum_{j \geq 1} j m_j^{(a)}$  が  $\lambda_{a+1} + \lambda_{a+2} + \cdots + \lambda_n$  に等しい configuration 全体にわたる．

ストリング仮説を導入し，等式 (4) を  $n = 2$  の場合に初めて証明したのは他ならぬ Bethe その人であった．Kerov, Kirillov, Reshetikhin が rigged configuration を発明し，等式 (4) やその拡張を全単射の組合せ論に昇華させたのはそれから半世紀程後のことである．KKR 理論は，等式 (4) に自然な  $q$  類似が存在することを明らかにした．

$$q^{-\frac{L(L-1)}{2}} K_{\lambda, (1^L)}(q) = \sum_m M_q(m). \quad (5)$$

ここで  $K_{\lambda, (1^L)}(q)$  は Kostka-Foulkes 多項式 [9] である．一方  $M_q(m)$  は，rigged configuration  $(\mu, r)$  に対する Heisenberg 鎖の「運動量」 $c(\mu, r)$  の rigging についての母関数である．

$$M_q(m) = \sum_r q^{c(\mu, r)} = q^{c(\mu, 0)} \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{j \geq 1} \left[ \begin{matrix} p_j^{(a)} + m_j^{(a)} \\ m_j^{(a)} \end{matrix} \right]$$

ここで  $\left[ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] = \prod_{j=1}^b \frac{1-q^{a+1-j}}{1-q^j}$  は  $q$ -2 項係数．また  $c(\mu, r)$  は charge 関数とも呼ばれ，

$$c(\mu, r) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{n-1} C_{a,b} \min(\mu^{(a)}, \mu^{(b)}) - \min(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}) + \sum_{a=1}^{n-1} |r^{(a)}| \quad (6)$$

で与えられる<sup>3</sup>．ただし自然数列  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ， $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$  について， $\min(\lambda, \nu) = \sum_{i,j} \min(\lambda_i, \nu_j)$ ， $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$  という記号を用いた．

rigging についての和が  $q$ -2 項係数になるが，それは Bethe 根があたかも Fermi 粒子のような排他性を持つことを反映していることから (5) は Fermi 公式と呼ばれる．任意のアフィン・リー環において Fermi 公式予想 ( $X = M$  予想) が定式化されている [10]．

<sup>3</sup>ここでは  $\mu^{(0)} = (1^L)$  であるが，高階スピンの Heisenberg 鎖では一般の  $\mu^{(0)}$  に付随する Kostka-Foulkes 多項式  $K_{\lambda, \mu^{(0)}}(q)$  が出てくる．



この結果は、 $\mu^{(1)}$  に割り振られた rigging のみが線形に発展し、それ以外のデータは全て保存量であることを意味する。特にヤング図  $\mu^{(1)} = (4, 3, 2)$  はソリトンの振幅のリストであり、各 rigging の速度は対応するソリトンの振幅に一致する。

実は箱玉系には可換な時間発展の族  $\{T_j^{(a)} \mid 1 \leq a \leq n-1, j \geq 1\}$  を導入することができ、先の  $T$  はその中の一つ  $T = T_\infty^{(1)}$  として含まれる。一般化された時間発展  $T_j^{(a)}$  は、 $\mu^{(a)}$  の rigging だけを線形に変化させ、それ以外のデータを不変に保つ。

以上をまとめると、KKR 理論は箱玉系の逆散乱形式 [16] を与えている。前者におけるストリングは後者におけるソリトンである。rigged configuration は箱玉系の散乱データ、即ち作用・角変数である。configuration(ヤング図の組) は保存量、作用変数であり、ソリトンの振幅を表す。一方 rigging(整数の組) は線形に時間発展する角変数で、ソリトンの位相を与える。highest path から rigged configuration への KKR 写像は作用・角変数への変数分離であり、その逆は逆散乱 (Gel'fand-Levitan) 写像である。箱玉系の時間発展は角変数の直線運動に変換され、初期値問題が解かれる。Fermi 公式 (5) の各項は、

$$q^{c(\mu,0)} \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{j \geq 1} \begin{bmatrix} p_j^{(a)} + m_j^{(a)} \\ m_j^{(a)} \end{bmatrix} = \text{「作用変数が } \{m_j^{(a)}\} \text{ である箱玉系の highest 状態の分配関数」}$$

という準粒子描像を獲得する。

もともと Bethe 仮説は量子可積分系の解法である。それをソリトン方程式の逆散乱法の量子化という観点から捉えたのが Faddeev ら旧レニングラード学派による量子逆散乱法 [3, 8] であった。従って、組合せ Bethe 仮説は超離散ソリトン系の逆散乱法を与え、初期値問題を解くだろうと期待するのは自然なことである。KKR 理論は誕生からほぼ 20 年を経て箱玉系に巡り会い、実際その任務に真価を発揮したのである。

KKR 理論	箱玉系 (無限格子上)	結晶基底理論
rigged configuration	散乱データ	アフィン結晶基底のテンソル積
KKR 写像	逆散乱写像	頂点作用素 $\Phi$ (次節)

## 5 KKR 全単射と頂点作用素

では KKR 全単射 (1) とは具体的にどんなアルゴリズムであろうか。オリジナルな組合せ論的手続きについては講演および文献 [5, 6, 7] に譲り、ここでは rigged configuration から highest path を作り出す表現論的方法 [11, 12] のアイデアを紹介しよう。鍵となるのはランクに関する入れ子構造  $sl(n) \supset sl(n-1) \supset \dots \supset sl(1)$  である。まず文字  $n$  だけからなる自明な  $sl(1)$  path  $p^{(n-1)}$  から出発し、次に文字  $n-1, n$  からなる  $sl(2)$  path  $p^{(n-2)}$  を作り、... という具合に徐々に path をふやかしながら進み、最終的に  $1, 2, \dots, n$  からなる  $sl(n)$  の highest path  $p^{(0)}$  が出来上がる。これが KKR 写像の像となる。途中の path  $p^{(a)}$  は、rigged configuration のヤング図  $\mu^{(a)}$  を行に分割し、それぞれに文字  $a+1, a+2, \dots, n$  を埋めて作った標準盤を並べたものとなる<sup>5</sup>。  $p^{(a)}$  を  $p^{(a-1)}$  にふやかすには、 $p^{(a)}$  を散乱データに昇格させ、文字  $a$  だけの真空状態へ「頂点作用素」で打ち込んでやればよい。この操作を  $\Phi^{(a)}$  と書くと以上の構成法は次のように定式化される。

<sup>5</sup>  $B_k$  を  $sl(n-a)$  の  $k$  階対称テンソル表現のクリスタルとし、 $\mu^{(a)} = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  とすると、 $p^{(a)} \in B_{\mu_1} \otimes \dots \otimes B_{\mu_l}$  という意味。

定理 1 ([11, 12]).

$$p^{(a)} = \Phi^{(a+1)} \circ \Phi^{(a+2)} \circ \dots \circ \Phi^{(n-1)}(p^{(n-1)}) \quad (7)$$

2 節の例  $p = p^{(0)} = 11112221322433$ , ( $n = 4$ ) では次のように定められる .

$$\begin{array}{ccc} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

即ち , 準標準盤の枠を略して書けば

$$p^{(3)} = 4, \quad p^{(2)} = 333 \otimes 4, \quad p^{(1)} = 2222 \otimes 233 \otimes 34$$

と成長して最終的に  $\mu^{(0)} = (1^{14})$  上に  $p^{(0)}$  の文字が埋められる . (7) が KKR 写像の正体である . 「頂点作用素」  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n-1)}$  は量子群の結晶基底と組合せ  $R$  を用いた表現論的操作 (nested Bethe ansatz の結晶基底版) として定義される .

## 6 超離散タウ関数

ここではそれをスキップして最終結果だけを一挙に書き下そう . つまり rigged configuration から highest path への KKR 写像の明示公式 [17] を与える .

$(\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, r^{(1)}), \dots, (\mu^{(n-1)}, r^{(n-1)}))$  を与えられた rigged configuration とする<sup>6</sup> . これから超離散タウ関数を次のように定める .

$$\tau_{k,i} = -\min\{c(\nu, s) + |\nu^{(i)}|\} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (8)$$

ここで  $c(\nu, s)$  とは , Fermi 公式の (6) に現れた charge 関数  $c(\mu, r)$  を

$$c(\mu, r) = (\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, r^{(1)}), \dots, (\mu^{(n-1)}, r^{(n-1)}))$$

を独立変数とする関数と見なしたときの

$$(\nu, s) = (\mu_{[k]}^{(0)}, (\nu^{(1)}, s^{(1)}), \dots, (\nu^{(n-1)}, s^{(n-1)}))$$

における値である . ただし ,  $\mu_{[k]}^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \dots, \mu_k^{(0)})$  . (8) の min は各  $a$  につき  $\nu^{(a)} \subseteq \mu^{(a)}$  となる  $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n-1)}$  にわたる . ただし一般に  $(\xi_1, \dots, \xi_l) \subseteq (\eta_1, \dots, \eta_m)$  とは左辺が右辺の (空も含む) 部分列という意味である . つまり  $\nu^{(a)}$  は , ヤング図  $\mu^{(a)}$  から一部の行だけを選択したもの全体をうごく .  $s^{(a)}$  は  $\nu^{(a)}$  で選ばれた行の rigging からなる整数列である . また  $\tau_{k,0} = \tau_{k,n} - |\mu_{[k]}^{(0)}|$  とおき ,  $|\nu^{(n)}| = 0$  と了解する . このとき KKR 全単射の像 , highest path を  $p^{(0)} = b_1 b_2 \dots b_L$  とすると ,  $b_k$  は  $\mu_k^{(0)}$  階対称テンソル表現の準標準盤であり , 次の様に決定される [17] .

$$\text{準標準盤 } b_k \text{ に登場する文字 } i \text{ の個数} = \tau_{k,i} - \tau_{k-1,i} - \tau_{k,i-1} + \tau_{k-1,i-1}. \quad (9)$$

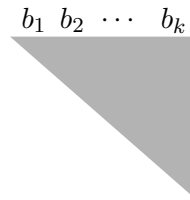
<sup>6</sup>本節の話は  $\mu^{(0)}$  を  $(1^L)$  型に制限せずに任意の自然数列  $\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \dots, \mu_L^{(0)})$  として通用する . その場合 path とは  $B_{\mu_1^{(0)}} \otimes \dots \otimes B_{\mu_L^{(0)}}$  の元である . 本文では簡単のため記号  $\otimes$  を略して 1 行のヤング図  $(\mu_k^{(0)})$  上の準標準盤の列としている .

この結果の背景にはソリトン理論の超離散化がある． $\tau_{k,i}$  は KP 方程式のタウ関数 [18] の超離散化になっており，広田型双線形方程式  $\tau\tau = \tau\tau + \tau\tau$  の超離散版

$$\bar{\tau}_{k,i-1} + \tau_{k-1,i} = \max(\bar{\tau}_{k,i} + \tau_{k-1,i-1}, \bar{\tau}_{k-1,i-1} + \tau_{k,i} - \mu_k^{(0)}) \quad (10)$$

を満たす ( $2 \leq i \leq n$ )．ここで  $\bar{\tau}_{k,i}$  は  $T_\infty^{(1)}$  で時間発展した rigged configuration に付随するタウ関数である．

これまで述べてきたように，KKR 理論は超離散ソリトン系の理論でもあるので，KKR 全単射がタウ関数により記述される事はもはや不思議ではない．興味深いのは KP のタウ関数が超離散化に不可欠な「全正值的」特殊化を持つことと，超離散極限が (8) のように charge 関数を介して Fermi 公式と結びついている点である．このことの持つ意味を思い巡らそう．まず (9) において局所変数  $b_k$  が 2 階差分として表されていることから  $\tau_{k,i}$  は箱玉系の時間発展 profile のうち以下の角領域 ( $b_1 \dots b_k$  も含む) の玉の数え上げに関係していることが推察される．



この絵は Baxter の角転送行列 [2] を想起させる．実際そのスペクトルはアフィン結晶基底のエネルギーとして量子群的に捉えられるが，KKR 理論はそれが charge 関数に等しいことを主張している．このことを然るべく精密化して次の定理を得る．

定理 2. ([17])

$$\begin{aligned} \text{箱玉系の角転送行列 (角領域の玉の数)} &= \text{アフィン結晶基底のエネルギー} \\ &= \text{超離散タウ関数 (明示式 (8))}. \end{aligned}$$

つまり，角転送行列に起源を持ち，結晶基底で特徴付けられる対象物に対して Bethe 仮説から明示式が提供される．その意味で定理 2 は Fermi 公式あるいは  $X = M$  予想の超離散版と言ってよい．(9), (10) はその系である．

	Bethe 仮説	角転送行列
組合せ論的对象物	rigged configuration	アフィン結晶基底のエネルギー
箱玉系での役割	作用・角変数	タウ関数
時間発展	線形	双線形

定理 2 を用いると，箱玉系の任意の状態を  $N$  ソリトン状態として明示できる．各ソリトンはアフィン結晶基底の元  $\theta = (\theta(i))_{i \in \mathbb{Z}}$  (ある条件を満たす整数の擬周期的無限列) でラベルされる．二つのソリトンの散乱  $\theta_1, \theta_2 \rightarrow \theta'_2, \theta'_1$  は組合せ  $R$  により  $\theta_1 \otimes \theta_2 \simeq \theta'_2 \otimes \theta'_1$  と指定される．これに応じて関係式

$$\Psi(\theta_1)\Psi^*(\theta_2) = \Psi^*(\theta'_2)\Psi(\theta'_1)$$

を満たす記号  $\Psi(\theta), \Psi^*(\theta)$  により生成される  $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$  上の代数を  $\mathcal{A}$  とする．整数  $i$  ごとに線形形式  $\langle \cdot \rangle_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}[q, q^{-1}]$  を

$$\langle 1 \rangle_i = 1, \quad \langle X\Psi(\theta) \rangle_i = \langle X \rangle_i, \quad \langle \Psi^*(\theta)X \rangle_i = q^{\theta(i)}\langle X \rangle_i \quad \text{for } \theta = (\theta(i))_{i \in \mathbb{Z}}$$

により定義する．ここで  $X$  は  $\mathcal{A}$  の任意の元である． $N$  ソリトン解は超離散極限

$$\tau_{k,i} = -\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\log \langle (\Psi(\theta_1) + \Psi^*(\theta_1)) \cdots (\Psi(\theta_N) + \Psi^*(\theta_N)) \rangle_i}{\log q} \quad (11)$$

により与えられる．ここで  $\theta_1, \dots, \theta_N$  は左辺の  $k$  に応じて時間発展したアフィン結晶基底の元である (詳しくは [17]) ．(11) にはソリトン理論と結晶基底のエッセンス (自由 Fermion 的構造と組合せ  $R$ ) が共存する．技術的にはアフィン結晶基底の実現  $\theta = (\theta(i))_{i \in \mathbb{Z}}$  は, 通常の homogeneous 描像でなく principal 描像になっている点が興味深く, 他の Lie 環への拡張の手がかりになると期待される．

## 7 周期系と超離散 Jacobian

可解格子模型の対称性は量子群  $U_q$  が司る．KKR 理論は  $q = 1$  における Bethe 方程式の研究の産物といえるが, 実はこれ以外に  $q = 0$  の場合にも系統的な結果が知られている [19] ．Bethe 方程式は  $q = 0$  ではストリング中心方程式と呼ばれる線形合同方程式に帰着し, その解の数え上げはウエイト多重度を与え, Fermi 公式のパートナーとも言うべきもう一つの指標公式が導かれる．(1) と対比した述べ方をするならば

$$\{\text{一般の paths}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{ストリング中心方程式の根}\} \quad (12)$$

であり, 特に右辺は有限集合である．このように組合せ Bethe 仮説には  $q = 1$  と  $q = 0$  のヴァージョンがあるが, 後者が関与する超離散可積分系は何であろうか．その答えは少なくとも  $sl(2)$  の場合には周期的境界条件の箱玉系 (以下「周期箱玉系」) であり, ソリトン方程式の準周期解の超離散類似を与えることが分かっている [22] ．

組合せ Bethe 仮説	指標公式	箱玉系	角変数
$q = 1$	既約表現の多重度	無限系	rigged configuration
$q = 0$	ウエイト多重度	周期系	ストリング中心方程式の根

周期箱玉系の時間発展の例をあげておく．

$$\begin{aligned} t=0: & 1110000110010 \\ t=1: & 0001110001101 \\ t=2: & 1100001110010 \\ t=3: & 0011100001101 \\ t=4: & 1100011100010 \end{aligned}$$

ここで  $0 = \text{空箱}$ ,  $1 = \text{玉}$  である．ソリトン (玉の連なり) が回り込みながら散乱を繰り返す様子が観測される．周期箱玉系にも可換な時間発展  $T_1, T_2, \dots$  があり, 上のパターンは  $T_3$  による． $T_\infty$  のもとの周期は先駆的研究 [23] において組合せ論的な議論により求められた．



定理 3. ([22]) 周期箱玉系の状態を path と見なすと (12) は時間発展の族  $\{T_l\}$  の同時線形化スキームを与える .

周知のように, 周期的ソリトン (Lax) 方程式における時間発展は多くの場合, Lax 作用素のスペクトル曲線の Jacobi 多様体上で線形化される [20, 21]. その意味で (12) の右辺は, Jacobi 多様体の超離散類似になっている . 1:1 対応は KKR 全単射の然るべき一般化による . 特に  $\rightarrow$  は Abel-Jacobi 写像に相当し,  $\leftarrow$  は超離散 Riemann テータ関数により明示することもできる . 例えばシステムサイズ  $L$  で振幅が  $I = \{i_1 < \dots < i_g\}$  の  $g$  個のソリトンがいる場合,

$$A = (\delta_{ij}p_i + 2 \min(i, j))_{i, j \in I}, \quad p_i = L - 2 \sum_{j \in I} \min(i, j),$$

$$\mathbf{p} = {}^t(p_{i_1}, \dots, p_{i_g}), \quad \mathbf{h}_l = {}^t(\min(l, i_1), \dots, \min(l, i_g))$$

とおくと, (12) の右辺, 即ち角変数の集合は

$$\mathcal{J} = \mathbb{Z}^g / A\mathbb{Z}^g \quad (13)$$

となる . 但し  $p_\infty \geq 0$  と仮定する . 周期箱玉系の時間発展  $T_l$  は  $\mathcal{J}$  上の速度  $\mathbf{h}_l$  の直線運動に変換される . 正定値行列  $A$  を周期行列とする超離散 Riemann テータ関数

$$\Theta(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp \left( - \frac{{}^t \mathbf{n} A \mathbf{n} / 2 + {}^t \mathbf{n} \mathbf{z}}{\epsilon} \right) \right) = - \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \{ {}^t \mathbf{n} A \mathbf{n} / 2 + {}^t \mathbf{n} \mathbf{z} \}$$

を用いると初期値問題の解は以下のように明示される .

定理 4. ([24]) 角変数  $\mathbf{J} \in \mathcal{J}$  に対応する path  $b_1 \dots b_L \in \{0, 1\}^L$  は,  $\mathbf{I} = \mathbf{J} - \frac{\mathbf{p}}{2}$  として

$$b_k = \Theta(\mathbf{I} - k\mathbf{h}_1) - \Theta(\mathbf{I} - (k-1)\mathbf{h}_1) - \Theta(\mathbf{I} - k\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty) + \Theta(\mathbf{I} - (k-1)\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty).$$

この定理は (9) の周期系版である . 超離散 Riemann テータ関数は, 本質的に周期系に対する超離散タウ関数 (8) に他ならない . ソリトンの長さに重複がある一般の場合には rational characteristic の超離散 Riemann テータ関数が現れる . 組合せ Bethe 仮説はこれらの導出を単純な初等計算に帰着させる .

定理 3 を (13) の状況に適用すると任意の時間発展  $T = \prod_l T_l^{c_l}$  に関する基本周期  $N$  は, 対応する角変数の速度  $\mathbf{h} = \sum_l c_l \mathbf{h}_l$  により

$$N\mathbf{h} \in A\mathbb{Z}^g$$

を満たす最小の自然数と特徴付けられ, 直ちに

$$N = \text{LCM} \left( 1, \frac{\det A}{\det A_1}, \dots, \frac{\det A}{\det A_g} \right) \quad (14)$$

と決定される . ここで  $A_i$  は  $A$  の  $i$  列を  $\mathbf{h}$  に取り替えた行列であり,  $0$  でない有理数  $r_0, \dots, r_g$  の最小公倍数  $\text{LCM}(r_0, \dots, r_g)$  とは  $|\mathbb{Z}r_0 \cap \dots \cap \mathbb{Z}r_g|$  の最小元である . (14) で  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_\infty$  の場合は [23] の結果に帰着する . この他にも定理 3 を用いると, 保存量 (作用変数) で指定される「等位集合」の元の個数や  $q = 0$  における Bethe 固有値, 「Bethe ベクトル」などが系統的に導かれる .  $A_n^{(1)}$  型の周期系で最も一般的な状況の予想については math-ph/0511013 を参照されたい .

本稿の  $\mathcal{J}$  (13) は組合せ Bethe 仮説から得られたものであるが，周期的戸田格子に付随したトロピカル超楕円曲線の Jacobian にも起源を求めることが出来る [25] . トロピカル幾何の発展は様々な分野を横断しており，今後組合せ Bethe 仮説ともどのように交差するか楽しみである .

本稿に関連する議論，共同研究をして頂いた井上玲，尾角正人，坂本玲峰，高木太一郎，竹野内晃，中西知樹，山田泰彦 諸氏に感謝いたします .

## 参考文献

- [1] H. A. Bethe, Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, Z. Physik **71** (1931) 205–231.
- [2] R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, London, (1982).
- [3] V.E.Korepin, N.M.Bogoliubov and A.G.Izergin, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge Univ. Press, (1997).
- [4] M. Takahashi, Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models, Cambridge Univ. Press, (1999).
- [5] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group. J. Soviet Math. **41** (1988) 916–924.
- [6] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux. J. Soviet Math. **41** (1988) 925–955.
- [7] A. Schilling, X=M theorem: Fermionic formulas and rigged configurations under review, MSJ Memoirs **17** (2007) 75–104 . 本稿とは convention が違うので要注意 .
- [8] L.A.Takhtajan, Introduction to algebraic Bethe ansatz, Lect. Note. Phys. **242** Springer, Berlin (1985) 175–219.
- [9] I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford Univ. Press, New York (1995).
- [10] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, Prog. in Math. Phys. **23** (2002) 205–272.
- [11] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection, Nucl. Phys. B**740** [PM] (2006) 299–327 , 日本語の解説は「箱玉系の頂点作用素と分配関数」, 数理解析研講究録, **1302** (2003) 91–107.
- [12] R. Sakamoto, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection II. Proof for  $\mathfrak{sl}_n$  Case, to appear in J. Algebraic Combinatorics, (math.QA/0601697).
- [13] 最近の特集として，数学セミナー (2006) 3月号 . 発見者による日本語の解説は，高橋大輔，薩摩順吉「単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて」, 日本応用数理学会論文誌 **1** (1991) 41–60 .

- [14] 最近の成書として, 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003). 箱玉系の文脈では T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.
- [15] 最近の成書として, J. Hong and S-J. Kang, Introduction to quantum groups and crystal bases, GSM**42** AMS (2002). 創始者の日本語の解説は, 柏原正樹, 「量子群の結晶化」, 数学 **44** (1992) 330–342.
- [16] M. J. Ablowitz and H. Segur, Solitons and the inverse scattering transform, SIAM Studies in Appl. Math. **4**. Philadelphia Pa. (1981).
- [17] A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Tau functions in combinatorial Bethe ansatz, to appear in Nucl. Phys. B (math.QA/0610505).
- [18] M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **19** (1983) 943–1001.
- [19] A. Kuniba and T. Nakanishi, The Bethe equation at  $q = 0$ , the Möbius inversion formula, and weight multiplicities: I. The  $sl(2)$  case, Prog. in Math. **191** (2000) 185–216.
- [20] 田中俊一, 伊達悦朗, 「KdV 方程式」紀伊國屋書店 (1979).
- [21] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-band linear operators and Abelian varieties Russian Math. Surveys **31** (1976) 59–146.
- [22] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system, Nucl. Phys. B**747** [PM] (2006) 354–397.
- [23] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, Fundamental cycle of a periodic box-ball system, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 99–121.
- [24] A. Kuniba and R. Sakamoto, The Bethe ansatz in a periodic box-ball system and the ultradiscrete Riemann theta function, J. Stat. Mech. (2006) P09005, Combinatorial Bethe ansatz and ultradiscrete Riemann theta function with rational characteristics, Lett. Math. Phys. **80** (2007) 199–209, 周期箱玉系と超離散リーマンテータ関数, 数理解析研講究録 1541 (2007) 73–83.
- [25] R. Inoue and T. Takenawa, Tropical spectral curves and integrable cellular automata, arXiv:0704.2471, 本数学会 無限可積分系 特別講演.