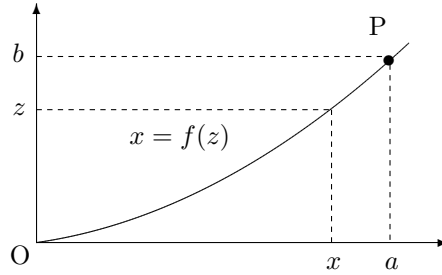


Abel の問題、等時性が厳密に成り立つ振子

x 軸を水平方向に、 z 軸を鉛直上向きにとる．原点 $O: (x, z) = (0, 0)$ を通る曲線 $x = f(z)$ 上に点 $P: (a, b)$ をとる． $a = f(b)$ ．この曲線上に滑らかに拘束された質点が P から初速で 0 ですべりおり、原点に達するまでの時間を T とする．このとき

降下時間 T が、高度 b の与えられた関数 $T(b)$ となるような曲線 $x = f(z)$ を決定せよ

という問が考えられる．これを Abel の問題という．与えられた曲線に対して降下時間を求めるのが通常の問題だとすれば、これは逆問題の一種である．特別な場合として $T(b)$ が b に依らない定数関数であると要請すれば等時性が厳密に成り立つ「振子」を求める問題に帰着する．以下では重力加速度の大きさを g とする．なお、本問題は、力学よりも数理解物理的な問であり、多少ながら微積分の技巧を要する．従って、好學あるいは向学の徒はともかく、大学初年次に学ぶ際には傍観するに留めてよい．



(i) T は関数 $f(z)$ を用いて

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\varphi(z)}{\sqrt{b-z}} dz \quad \text{但し} \quad \varphi(z) = \sqrt{1 + f'(z)^2}, \quad f'(z) = \frac{dx}{dz} = \frac{df(z)}{dz} \quad (1)$$

と表されること示せ．

(1) により Abel の問題は、与えられた関数 $\tau(b)$ に対して

$$\tau(b) = \int_0^b \frac{\varphi(z)}{\sqrt{b-z}} dz \quad \text{但し} \quad \tau(b) = \sqrt{2g} T(b) \quad (2)$$

を満たす $f(z)$ を求めよ、という微積分の問題に帰着する．

(ii) (2) の両辺に $\frac{1}{\sqrt{y-b}}$ をかけて、 b について 0 から y まで積分することにより以下の関係式を導け．

$$\pi \int_0^y \varphi(z) dz = 2\sqrt{y} \tau(0) + 2 \int_0^y \tau'(b) \sqrt{y-b} db. \quad (3)$$

(iii) (3) から以下の関係式を導け．

$$\pi \sqrt{1 + f'(z)^2} = \frac{\tau(0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{\tau'(b) db}{\sqrt{z-b}}. \quad (4)$$

(iv) 等時性が厳密に成り立つ降下曲線 $x = f(z)$ を求めよ．

(v) 問 (iv) で求めた曲線に沿って質点が往復運動をする際の周期を求めよ．

解答例

(i) 質点の質量を m とすると (x, z) における速さ v はエネルギー保存 $\frac{m}{2}v^2 = mg(b-z)$ から $v = \sqrt{2g(b-z)}$ である. 故に途中の点 (x, z) 近傍の微小区間を通過するのに要する微小時間は $\frac{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}}{\sqrt{2g(b-z)}}$. 降下時間 T は, これを P から O まですべりおる過程に応じて積分すればよく,

$$T = \int \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}}{\sqrt{2g(b-z)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + f'(z)^2}}{\sqrt{b-z}} dz.$$

で与えられる. (1) が導かれた.

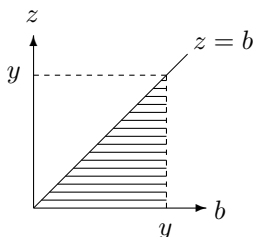
(ii) まず左辺については部分積分により

$$\int_0^y \frac{\tau(b)db}{\sqrt{y-b}} = \left[-2\tau(b)\sqrt{y-b} \right]_{b=0}^{b=y} + 2 \int_0^y \tau'(b)\sqrt{y-b} db = 2\sqrt{y}\tau(0) + 2 \int_0^y \tau'(b)\sqrt{y-b} db. \quad (5)$$

右辺については

$$\int_0^y \frac{db}{\sqrt{y-b}} \int_0^b \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{b-z}} = \int_0^y dz \varphi(z) \int_z^y \frac{db}{\sqrt{(y-b)(b-z)}} = \pi \int_0^y dz \varphi(z). \quad (6)$$

ここで, 左側の等号は, 積分の領域 $\{(b, z) | 0 \leq b \leq y, 0 \leq z \leq b\}$ が $\{(b, z) | 0 \leq z \leq y, z \leq b \leq y\}$ と同じである事による. 下図参照.



(6) の右側の等号を得るには $b = \frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2} \sin \theta$ とおき, $y \geq z$ に注意して

$$\int_z^y \frac{db}{\sqrt{(y-b)(b-z)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{y-z}{2} \cos \theta d\theta}{\frac{y-z}{2} \cos \theta} = \pi$$

を用いた. (5) と (6) から (3) が従う.

(iii) (3) の両辺を y で微分した後に y を z に置き換えれば良い. (3) 右辺第 2 項は積分上限と被積分関数ともに y に依存するが, 前者の y 微分は因子 $\sqrt{y-b}$ のために寄与が 0 になることに注意.

(iv) (4) で $\tau(z) = c$ (z によらない定数) とおくと,

$$1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{c^2}{\pi^2 z}.$$

$\frac{c^2}{\pi^2} = 2a$ において微分方程式

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{2a}{z} - 1} \quad (7)$$

を解こう. 変数変換 $z = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}$ をすれば

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{d\theta} / \frac{dz}{d\theta} = \left(2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \frac{dx}{d\theta}, \quad \sqrt{\frac{2a}{z} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

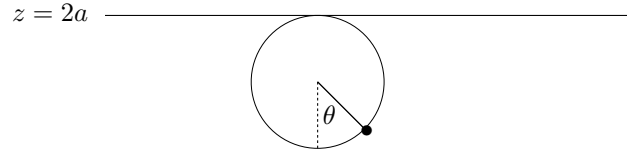
よって (7) は

$$\frac{dx}{d\theta} = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2} = a(1 + \cos \theta)$$

となる. $x(z=0) = 0$ なので $x(\theta=0) = 0$ として, θ について積分すればよい. z の表式と併せて

$$x = a(\theta + \sin \theta), \quad z = a(1 - \cos \theta) \quad (8)$$

を得る．求める曲線 $x = f(z)$ の媒介変数表示が得られた．これは半径 a の円を高さ $z = 2a$ の天井に沿って転がした際に，最初は原点にあった最下点が描くサイクロイド曲線である．



(v) サイクロイドの何処 (高さ z) から質点を離しても原点に到達する時間は $T = \tau(z)/\sqrt{2g} = c/\sqrt{2g} = \pi\sqrt{a/g}$ である．往復運動の周期は $4T$ なので，答えは

$$4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (9)$$

これは長さ a の単振り子の微小振動の周期 $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ の丁度 2 倍になっている．

注意．

(2) は一見 $\tau(0) = 0$ を意味するように見えるがそうとは限らない．一般には「たわんだ曲線」もあるので，関数 $f(z)$ は多価関数である．すなわち，与えられた高さ z をとる x の値 $f(z)$ は複数存在する．降下時間はそのうちどの x を出発点とするかを指定する必要がある．従って $T(b)$ という記法自体不十分であり，出発点の x 座標の値 $x = a$ を用いて $\mathcal{T}(a)$ と指定する必要がある．(終着座標は $x = 0$.) このとき (2) の真の意味は

$$\sqrt{2g}\mathcal{T}(a) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{z(a) - z(x)}} dx \quad (10)$$

である．

(2) を解くのに形式的に $\tau(0)$ の出現を避けるには，両辺に e^{-sb} をかけて b について 0 から ∞ まで積分すれば良い． $s > 0$ を仮定すれば収束する．(6) と同様の操作をしてやると

$$\mathcal{L}_s(\varphi) = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \mathcal{L}_s(\tau) \quad (11)$$

という結果を得る．ここで b の関数 $w(b)$ に対して Laplace 変換

$$\mathcal{L}_s(w) = \int_0^\infty e^{-sb} w(b) db \quad (12)$$

を用いた．また次の第 2 式も使っている．

$$\mathcal{L}_s(1) = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}_s\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad (13)$$

Abel の問題を $\tau \mapsto \varphi$ とすると，その形式解は (11) により，Laplace 逆変換を用いて

$$\varphi = \mathcal{L}_s^{-1} \left(\sqrt{\frac{s}{\pi}} \mathcal{L}_s(\tau) \right) \quad (14)$$

と与えられる．上述のサイクロイドは (13), (14) を用いても導出されることを確かめよう．