Faraday の電磁誘導の法則の直接証明

Faraday の電磁誘導の法則は

$$\int_C (\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}d\mathbf{S} \tag{1}$$

と表される．ここで S は曲面，C は S の境界であり閉曲線．これらは整合的に向き付けられており，しかも運動 (時間に依存) していて良い．$\mathbf{v}$ は線素 $d\mathbf{l}$ の速度である．$\mathbf{E},\mathbf{B}$ は一般に時間と共に変動する電場，磁場である．左辺は C に沿う起電力，右辺は C を貫く磁束の変化率の (-1) 倍である．

多くの教科書は，$C,S,\mathbf{E},\mathbf{B}$ の何れかは時間に依存しないという限定的場合を示すだけに留まるが，ここでは完全に一般の場合を直接証明しよう．

まず (1) にポテンシャルによる表示

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi, \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{2}$$

を代入する．右辺には Stokes の定理を適用すると，(1) は次と等価である事が分かる．

$$\int_C \Big(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}\Big)d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_C \mathbf{A}d\mathbf{l}. \tag{3}$$

S が居なくなり C だけになった．閉曲線 C は一般に運動するので時間 t の関数として $C=C(t)$ と書き，次の様に媒介変数表示する．

$$C(t) = \{\mathbf{l}(t,s) \mid 0\le s\le 1\}, \quad \text{ただし } \mathbf{l}(t,0)=\mathbf{l}(t,1). \tag{4}$$

右の条件は $C(t)$ が閉曲線である事の反映である．s の範囲を $[0,1]$ に設定したのは便宜上の事で，時間に依存しなければ任意の連続した有限区間にしてよい．$\mathbf{l}(t,s)$ を用いると

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial\mathbf{l}(t,s)}{\partial s}ds, \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{l}(t,s)}{\partial t} \tag{5}$$

と明示される．今後強調する必要性が薄い場合は $\mathbf{l}(t,s)$ を単に $\mathbf{l}$ と書く．(5) を (3) に代入し，$(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{A})d\mathbf{l} = -(\mathbf{v}\times d\mathbf{l})\mathrm{rot}\mathbf{A}$ に注意すると，証明すべきは次式になる．

$$\int_0^1 ds\Big(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial s} + (\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial s})\mathrm{rot}\mathbf{A}\Big) = \frac{d}{dt}\int_0^1 ds\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial s}. \tag{6}$$

$\mathbf{A}=\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ が $C(t)$ 上を進むので，$\mathbf{A}=\mathbf{A}(t,\mathbf{l}(t,s))$ という s,t 依存性がある．故に

$$\text{(6) の右辺} = \int_0^1 ds\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial s} + \Big((\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\nabla)\mathbf{A}\Big)\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial s} + \mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{l}}{\partial t\partial s}\right) \tag{7}$$

となる．ここで $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ とは $\frac{\partial\mathbf{A}(t_1,\mathbf{l}(t_2,s))}{\partial t_1}|_{t_1=t_2=t}$ を表し，(10) でも同様である．また $\big(\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\nabla\big)\mathbf{A}$ は一般式

$$\big(\mathbf{P}\nabla\big)\mathbf{A} = P_x\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + P_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + P_z\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} \tag{8}$$

に於いて $\mathbf{P}=\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}$ として定義されるベクトルである．

一方 (6) の左辺については，容易に示せる恒等式

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\mathrm{rot}\mathbf{A} = \Big(\big(\mathbf{P}\nabla\big)\mathbf{A}\Big)\mathbf{Q} - \Big(\big(\mathbf{Q}\nabla\big)\mathbf{A}\Big)\mathbf{P} \tag{9}$$

を適用すると

$$(6) \text{ の左辺} = \int_0^1 ds \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} + \left((\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \nabla) \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} - \left((\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} \nabla) \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right) \tag{10}$$

を得る．(7) と (10) から

$$\begin{aligned} (6) \text{ の右辺} - (6) \text{ の左辺} &= \int_0^1 ds \left(\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t \partial s} + \left((\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} \nabla) \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right) \\ &= \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right) = [\mathbf{A}\mathbf{v}]_{s=0}^{s=1} = 0. \end{aligned}$$

最後の等号は $s = 0$ と $s = 1$ が閉曲線 $C(t)$ 上の同じ点である事 ((4) の右側の式) による．以上で (6) 従って (1) が証明された．省みると電磁気学からの必要な input はポテンシャルによる表示 (2) に集約されている事が分かる．