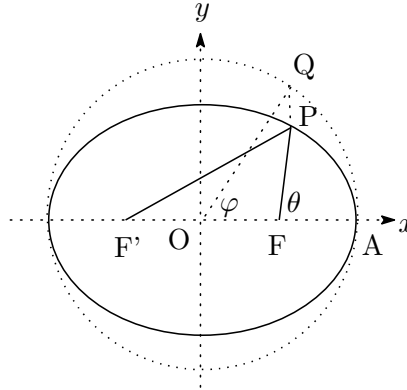


補遺： ケプラー方程式

ケプラーの第1法則によると、太陽の周りを束縛運動する惑星は、太陽を含む平面上で、太陽を一つの焦点とする一定の楕円軌道を描く¹。図で F, F' が楕円の焦点であり、太陽は F に静止している。惑星の位置を P とし、 Q は楕円に外接する円上で PQ が y 軸と平行になる点。以下の様に $r, r', c, \varphi, \theta$ を定める。

$$\overline{PF} = r, \quad \overline{PF'} = r', \quad \overline{OF} = \overline{OF'} = c, \quad \angle QOA = \varphi, \quad \angle PFA = \theta. \quad (1)$$



φ を離心近点角、 θ を真近点角、 A を近日点という。

(i) $r + r' = 2a$ となる点 P の軌跡は θ を用いて以下の式で表される事を示せ。

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (2)$$

ただし $a \geq c$ であり、 λ, ε は以下により与えられる。 ε を離心率と呼ぶ。

$$\lambda = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (3)$$

(ii) 点 P の座標を (x, y) とすると楕円の方程式 $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ が成り立つ事を示せ。

(iii) $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$ とおく。このとき r は以下の式で表される事を示せ。

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \varphi). \quad (4)$$

(iv) (2), (4) および $r \sin \theta = b \sin \varphi (= y)$ を用いて以下の関係式を示せ。

$$\frac{\lambda^2 d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = ab(1 - \varepsilon \cos \varphi) d\varphi. \quad (5)$$

(v) 惑星が近日点 $\theta = 0$ から反時計回りに $\theta = \theta$ まで運動する際に線分 FP が覆う領域の面積を S とする。(2) と (5) を用いて以下の式を示せ。ただし φ は真近点角 θ に対応する離心近点角である。

$$S = \frac{ab}{2}(\varphi - \varepsilon \sin \varphi). \quad (6)$$

¹ 惑星の質量は太陽に比べて十分小さいとし、太陽の静止系を慣性系として扱う。

(vi) 惑星の公転周期を T 、近日点からの経過時刻を t とする．ケプラーの第 2 法則から以下のケプラー方程式を導け．

$$\varphi - \varepsilon \sin \varphi = \frac{2\pi t}{T}. \quad (7)$$

以下では公転周期により無次元化した時間を $\tau = \frac{2\pi t}{T}$ と書く．

(vii) ケプラー方程式 $\varphi - \varepsilon \sin \varphi = \tau$ の解 $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$ を離心率 ε についてのべき級数

$$\varphi = \varphi_0(\tau) + \varepsilon \varphi_1(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_2(\tau) + \cdots \quad (8)$$

と仮定して $\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ を求めよ．

(viii) 一般にケプラー方程式の解は以下の様なフーリエ級数として表される事を論ぜよ．

$$\varphi = \tau + \sum_{n \geq 1} A_n \sin(n\tau). \quad (9)$$

ベッセル (F. W. Bessel, 1784–1846) はケプラー方程式を解くために次の関数 (ベッセル関数) を導入した．

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\alpha - z \sin \alpha) d\alpha \quad (n : \text{整数}). \quad (10)$$

(ix) 展開 (9) におけるフーリエ係数 A_n はベッセル関数を用いて以下で与えられる事を示せ．

$$A_n = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon). \quad (11)$$

(x) ベッセル関数は次のべき級数展開を持つ事が知られている．

$$J_n(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (12)$$

(11) と (12) を用いてフーリエ級数解 (9) を ε についてのべき級数に展開した際の $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ の項を求めよ．また (vii) の結果と比較せよ．

解答例

- (i) $r' = 2a - r = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr \cos(\pi - \theta)}$ の両辺を 2 乗して r についての 1 次式を解けばよい.
- (ii) (2) と $x = c + r \cos \theta$ から $\cos \theta$ を x で表す事ができる. その結果を $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ の r に代入して整理すればよい.
- (iii) $r^2 = (x - c)^2 + y^2$ の右辺に $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$ に代入すればよい.
- (iv) (2)=(4) の微分から

$$\frac{\lambda \sin \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = a \sin \varphi d\varphi.$$

これに $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = rb^{-1} = ab^{-1}(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ を用いればよい.

(v) $S = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta$ に (2) を代入し, (5) を用いて積分を実行すればよい.

(vi) 面積速度が一定で $\pi ab/T$ である事を用いればよい.

(vii) $\sin(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \cdots) = \sin \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 \cos \varphi_0 + O(\varepsilon^2)$ に注意して

$$\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \cdots - \varepsilon(\sin \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 \cos \varphi_0 + \cdots) = \tau$$

から $\varphi_0 = \tau, \varphi_1 = \sin \tau, \varphi_2 = \sin \tau \cos \tau$ を得る.

(viii) 真近点角と離心近点角の関係から φ は τ の奇関数であり, またケプラー方程式から $\varphi - \tau$ は τ について周期 2π の周期関数である. 以上の事とフーリエ級数展開定理による.

(ix) 通常のフーリエ係数の積分表示を用いる. その際 $\tau = 0, 2\pi$ では $\varphi = \tau$ が成り立つ事に注意して部分積分すると

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi - \tau) \sin(n\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(\varphi - \tau) \frac{-\cos(n\tau)}{n} \right]_{\tau=0}^{\tau=2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} - 1 \right) \frac{-\cos(n\tau)}{n} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\varphi = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos(n(\varphi - \varepsilon \sin \varphi)) d\varphi = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon). \end{aligned}$$

(x)

$$A_1 = 2J_1(\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad A_2 = J_2(2\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

によりフーリエ級数 (8) は ε について

$$\varphi = \tau + \varepsilon \sin \tau + \varepsilon^2 \sin \tau \cos \tau + \cdots$$

と展開される. これは (vii) の結果と一致している.