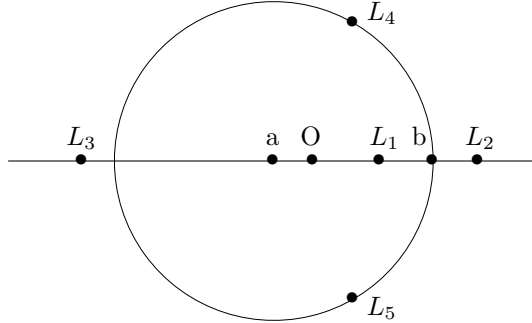


円制限 3 体問題と Lagrange 点

2 体問題の応用として，円制限 3 体問題の特殊解を求めよう．質量 m_a, m_b, m_c をもつ天体 a, b, c の平面上の運動を考える． $\frac{m_c}{m_a} \ll 1, \frac{m_c}{m_b} \ll 1$ とし，天体 a, b は c に万有引力を及ぼすが，c からは影響を受けず，両者は 2 体の重心 (下図の O) の周りに等速円運動するという近似を採用する．a, b をこのように仮定しても未だ c の運動は非自明である．これを円制限 3 体問題という．以下では ab の距離を一定値 r とする． $r = \overline{ab}$.



- (1) 天体 a, b が重心 O の周りに等速円運動する角速度 ω を求めよ．
- (2) 図の様に，天体 a, b を通る直線上の点を L_1, L_2, L_3 とする．天体 c が L_1 または L_2 または L_3 の位置を保ちながら a, b と共に等速円運動する解がある (Euler の直線解, 1760 年頃)．重心からの距離 $r_i = \overline{OL_i}$ を決定する方程式を与えよ．
- (3) L_4, L_5 は ab を一辺とする正三角形の頂点である．天体 c が a, b に対して相対的に L_4 ないし L_5 の位置に留まったまま等速円運動する解がある (Lagrange の正三角形解, 1772 年)．この事を確かめよ．

解答例

(1)

$$r_a = \overline{Oa} = \frac{m_b r}{m_a + m_b}, \quad r_b = \overline{Ob} = \frac{m_a r}{m_a + m_b} \quad (1) \quad \boxed{\text{rab}}$$

とおく. 重心 O を原点とする座標系は慣性系であることに注意すると, 天体 a, b の運動方程式は

$$m_a r_a \omega^2 = \frac{G m_a m_b}{r^2}, \quad m_b r_b \omega^2 = \frac{G m_a m_b}{r^2}, \quad \therefore \omega^2 = \frac{G(m_a + m_b)}{r^3}. \quad (2) \quad \boxed{\text{ome}}$$

(2)

$$L_1: \quad m_c r_1 \omega^2 = \frac{G m_c m_a}{(r_a + r_1)^2} - \frac{G m_c m_b}{(r_b - r_1)^2}, \quad \frac{r_1}{r^2} = \frac{r_b}{(r_a + r_1)^2} - \frac{r_a}{(r_b - r_1)^2}, \quad (3)$$

$$L_2: \quad m_c r_2 \omega^2 = \frac{G m_c m_a}{(r_a + r_2)^2} + \frac{G m_c m_b}{(r_2 - r_b)^2}, \quad \frac{r_2}{r^2} = \frac{r_b}{(r_a + r_2)^2} + \frac{r_a}{(r_2 - r_b)^2}, \quad (4)$$

$$L_3: \quad m_c r_3 \omega^2 = \frac{G m_c m_a}{(r_3 - r_a)^2} + \frac{G m_c m_b}{(r_3 + r_b)^2}, \quad \frac{r_3}{r^2} = \frac{r_b}{(r_3 - r_a)^2} + \frac{r_a}{(r_3 + r_b)^2}. \quad (5)$$

右側の式は $\boxed{\text{ome}}$ と $\boxed{\text{rab}}$ を用いて左側の式を簡単化したものである. r_a, r_b が与えられると, 一般にこれらは r_i に対する 5 次の代数方程式であり, 簡単な考察から必ず実数解を持つことがわかる. 例えば a を地球, b を月として, L_1, L_2, L_3 はどの辺りにあるのか, 数値的に計算してみよう.

(3) 天体 c が L_4 にある場合を考える. L_5 にある場合は対称性から従う. 重心 O を原点とし, その周りに角速度 ω で等速円運動する回転座標系では全ての天体は静止している. 図の直線を x 軸とし, 上向きに y 軸を取ると, 各天体の x, y 座標は

$$a: \begin{pmatrix} -r_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b: \begin{pmatrix} r_b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c: \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r - r_a \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

この座標系で天体 c の運動方程式が満たされていることを確かめれば良い. 天体 c は静止しているのでコリオリ力は働かず, 遠心力と重力が打ち消しあえば良い. 両者の和は

$$m_c \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r - r_a}{\frac{r}{2}} \right) \omega^2 + \frac{G m_a m_c}{r^3} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}r \\ -\frac{r}{2} \end{pmatrix} + \frac{G m_b m_c}{r^3} \begin{pmatrix} r - \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ -\frac{r}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

これは $\boxed{\text{ome}}$ により確かに 0 ベクトルである.

$L_1, \dots, L_5$ を Lagrange 点という. どれも円制限 3 体問題の解ではあるが, その安定性は L_1, L_2, L_3 と L_4, L_5 では異なり, 前者は不安定, 後者はあるパラメーター域では安定である. また, L_4, L_5 の位置は天体 a, b の質量比 $m_a : m_b$ に依らないことが顕著である. その簡単な説明を考えてみよ.

a を地球, b を月とした際にスペースコロニーを作るとしたら Lagrange 点 L_4, L_5 が有力候補地である. a を太陽, b を木星とした場合, L_4, L_5 に該当する位置には数千個の小惑星群が留まっている. これらは古代トロイア戦争の英雄の名が付いていることから, トロイア群 (Trojan asteroid) と呼ばれる. また, L_4, L_5 はトロイ点とも呼ばれる.

余談: 古代地中海世界で起きたとされるトロイア戦争は, ホメロスの叙事詩, ハインリッヒ・シュリーマンの劇的な発掘物語や映画等で有名であるが, 考古学的には未知の要素が大きい.