

ラプラス-ルンゲ-レンツベクトル Gruppen Pest の始祖的例題¹

国場敦夫 (東京大学大学院総合文化研究科)

1 誰のベクトル？

表題では Laplace, Runge, Lenz 3 人の名を冠したが, Runge-Lenz あるいは単に Lenz ベクトルと呼ばれることも多い. 但しその最初の発見者は少なくともこの 3 人ではない. Lenz が量子論へ応用したのは 1924 年であり, 当時ポピュラーだった Runge のベクトル解析の本 (1919) を引用した. Pauli は 1926 年の有名な水素原子の論文 [5] で「Lenz により用いられた」とだけ引用している. 現代的記法で最初に登場したのは統計力学の Gibbs と E.B.Wilson のベクトル解析の教科書 (1901) とされている. それ以前では Hamilton (1845?), Jacobi (1842) なども独立に発見していたらしく, Laplace の「天体力学」(1799) に至る. しかしこれも最古ではなく, 1710 年には Johann I. Bernoulli の門弟 Jakob Hermann がイタリア語で雑誌に発表しており, 同年 Bernoulli もそれを補完する結果を出版している. Goldstein[1] は Hermann-Bernoulli-Laplace ベクトルと呼ぶのがふさわしいと述べている. 今のところ Newton まで遡ろうという探索は成功していないらしいが, 将来最古の記録は書き換わるかもしれない.

本稿では「ラプラス-ルンゲ-レンツベクトル」が提起する対称性を考察する. それは量子論の黎明期以来, 物理における “Gruppen Pest” [2] とも呼ばれながら, 現代に通じているリー代数的アプローチの一端である [3].

2 ケプラー問題

太陽と惑星からなる系を古典力学的に扱おう. 相対位置ベクトル $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ は運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

に従う. ここで, μ は太陽と惑星の換算質量, k は万有引力定数と太陽質量と惑星質量の積である. また, $r = |\mathbf{r}|$ と書いた. 運動量 $\mathbf{p} = \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を用いるとハミルトニアンと角運動量

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{k}{r}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2)$$

¹数理科学「代数的物理観」2007年7月号 pp.50-55 (サイエンス社) 掲載記事. 出版社の了承を得て公開.

は共に保存量である。特に \mathbf{L} の保存は系の回転対称性に起因し、惑星が太陽を含む平面内の軌道を面積速度一定で運行することを意味する。 $1/r$ 型ポテンシャルに固有なもう一つの保存量が表題の「ラプラス-ルンゲ-レンツベクトル」であり、本稿では以下のように無次元化したものにとる²。

$$\mathbf{A} = b\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad b = (k\mu)^{-1}. \quad (3)$$

(1) を用いて $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ が容易に確認できる。 \mathbf{A} は \mathbf{L} と直交し、軌道面内にある。 \mathbf{A} と \mathbf{r} のなす角を θ とすると両者のスカラー積は (3) から

$$Ar \cos \theta = bL^2 - r$$

となる。ただし、 $(\mathbf{p} \times \mathbf{L})\mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\mathbf{L} = L^2$ を用いた。これから、楕円軌道 $r = bL^2(1 + A \cos \theta)^{-1}$ が導かれ、 \mathbf{A} は近日点へ向かうベクトルで、長さが離心率に等しいことがわかる。 \mathbf{A} が eccentricity ベクトルとも呼ばれる所以である。軌道が閉じるという性質は非自明で、 \mathbf{A} が保存することの現われとってよい。

保存量としてエネルギー H 、角運動量 \mathbf{L} 、ベクトル \mathbf{A} の7個がでてきたが、相対運動の位相空間は6次元なので、これらは独立ではなく二つの関係式がある。その一つは先に述べたように \mathbf{A} が軌道面内にあるという条件 $\mathbf{A}\mathbf{L} = 0$ である。もう一つは離心率とエネルギー、角運動量の関係式

$$\mathbf{A}^2 - 1 = 2b^2\mu\mathbf{L}^2H \quad (4)$$

である。惑星のような束縛運動では $H < 0$ なので離心率は $0 \leq A < 1$ となる。なお、保存量の関係式ではないが、(3) と \mathbf{L} とのベクトル積から

$$\left| \mathbf{p} + \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{L}}{bL^2} \right| = \frac{1}{bL}$$

が導かれる。即ちケプラー運動は運動量空間では円軌道になり、その中心の原点からのずれの大きさが $\frac{1}{bL}$ で与えられる (円定理)。運動量空間の原点は束縛運動のとき円の内部に、散乱状態のとき外部にある。

3 ポアソン構造

\mathbf{A} は時間に陽に依存しない保存量なので、ハミルトニアンとのポアソン括弧 $\{\mathbf{A}, H\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right)$ は0である。即ち各成分 A_j ごとに、それに付随するベクトル場 $\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ による H の微分は0である。再度言い換えると保存量 A_j はハミルトニアン (2) の無限小変

²これは Pauli の規格化 [5] の (-1) 倍である。

換 $x_i \rightarrow x_i - \epsilon \frac{\partial A_j}{\partial p_i}$, $p_i \rightarrow p_i + \epsilon \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ における不変性に起因する (ネーターの定理). あらわに書き下すと

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i + \epsilon' (\delta_{ij}(\mathbf{r}\mathbf{p}) + x_i p_j - 2x_j p_i), \\ p_i &\rightarrow p_i + \epsilon' \left(\delta_{ij} \mathbf{p}^2 - p_i p_j + \frac{x_i x_j - \delta_{ij} \mathbf{r}^2}{br^3} \right) \end{aligned}$$

となるが³ ($\epsilon' = \epsilon b$), これを眺めていても系の対称性は見えてこない.

正準変数の滑らかな関数全体はポアソン代数をなす. 即ち通常の積と和による結合代数構造に加えてポアソン括弧に関してリー代数となる. 一般に F, G が時間に陽に依存しない保存量であれば, ポアソン括弧のヤコビ律 $\{H, \{F, G\}\} = \{\{H, F\}, G\} - \{\{H, G\}, F\}$ から $\{F, G\}$ もハミルトニアンとポアソン可換であり, 保存量となる. こうして次々と作られる保存量は, ポアソン部分代数をなす. 今の場合そのリー代数 (symmetry algebra) の構造は

$$\{L_j, L_k\} = \epsilon_{jkl} L_l, \quad (5)$$

$$\{L_j, A_k\} = \epsilon_{jkl} A_l, \quad (6)$$

$$\{A_j, A_k\} = -2\mu b^2 \epsilon_{jkl} L_l H \quad (7)$$

となり, H は \mathbf{L}, \mathbf{A} とポアソン可換なのでその幕を度外視すればこれで閉じている³. 束縛運動の場合 $H = E$ は負の定数なので, $\tilde{A}_j = A_j / \sqrt{-2\mu E b^2}$ と規格化すると最後の二つの関係式は

$$\{L_j, \tilde{A}_k\} = \epsilon_{jkl} \tilde{A}_l, \quad \{\tilde{A}_j, \tilde{A}_k\} = \epsilon_{jkl} L_l \quad (8)$$

となる. よく知られているように (5) はリー代数 $su(2) \simeq so(3)$ の定義関係式である⁴. これに (8) を追加して拡大したものは 4 次直交群のリー代数 $so(4)$ である. より詳しくは 6 節で説明する. 基底を組み替えて $X_i^\pm = \frac{L_i \pm \tilde{A}_i}{2}$ とすれば, リー代数の同型 $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$ を反映した分離型の関係式 $\{X_j^\alpha, X_k^\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{jkl} X_k^\alpha$ にすることもできる. 同様にして散乱状態 ($E > 0$) の場合には $so(3, 1)$ が現れる.

4 水素型原子

量子論に転じよう. 原子番号 Z の原子核に一つの電子がクーロン力により束縛されている系, 即ち水素型原子を考える. Schrödinger 方程式は

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (9)$$

³ ϵ_{jkl} は添え字の入れ替えについて完全反対称で $\epsilon_{123} = 1$. 重複した添え字は 1~3 の和を意味する.

⁴本稿では特に断らない限り実リー代数の意味で用いる. また生成元は適宜規格化して考える.

であり、ハミルトニアン H の座標表示は (2) で $p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$, $k = Ze^2$ として得られる。角運動量 \mathbf{L} は (2) で与えられるが、 \mathbf{A} はエルミートになるように (3) を

$$\mathbf{A} = \frac{b}{2}(\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}) + \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (10)$$

と整形する ($b^{-1} = k\mu = Ze^2\mu$)。その第 j 成分は

$$A_j = b(\mu x_j H - p_j(\mathbf{p}\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2}x_j - 2i\hbar p_j). \quad (11)$$

積の順序に注意が要る。直接計算で交換関係

$$[H, \mathbf{L}] = [H, \mathbf{A}] = 0, \quad (12)$$

$$[L_j, L_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} L_l, \quad (13)$$

$$[L_j, A_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} A_l, \quad (14)$$

$$[A_j, A_k] = -2\mu b^2 i\hbar \epsilon_{jkl} L_l H \quad (15)$$

が確認できる。即ち (5)–(7) においてポアソン括弧 $\{, \}$ を形式的に $\frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$ に置き換えた交換関係が成り立つ。また古典論の場合と同様に内積 $\mathbf{A}\mathbf{L}$ と $\mathbf{L}\mathbf{A}$ は共に 0 となる。一方 (4) には

$$\mathbf{A}^2 - 1 = 2b^2\mu(\mathbf{L}^2 + \hbar^2)H \quad (16)$$

と量子補正が入る。ハミルトニアンとの可換性 (12) により量子論でも \mathbf{L} と \mathbf{A} は保存量であるが、これら同志は非可換なので同時固有状態をとれない。可換で独立な物理量はハミルトニアンを含めて 3 個であり、 H, \mathbf{L}^2, L_3 をとるとそのスペクトルは

$$H\psi = E_n\psi, \quad E_n = -\frac{k^2\mu}{2\hbar^2 n^2} \quad (n \geq 1),$$

$$\mathbf{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi \quad (0 \leq l \leq n-1),$$

$$L_3\psi = m\hbar\psi \quad (-l \leq m \leq l)$$

と与えられる。ここで n, l, m はそれぞれ主量子数、方位量子数、磁気量子数と呼ばれる整数である。慣用的に $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ を s, p, d, f, ... という記号であらわし、固有状態を対 (n, l) により

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f, \dots$$

と表記して、電子軌道と呼ぶ。例えば 3d は $(n, l) = (3, 2)$, $-2 \leq m \leq 2$ に対応する 5 個の電子軌道を表す⁵。

一般にハミルトニアンと可換な物理量 X があると、 $H\psi = E\psi$ を満たす固有状態について $H(X\psi) = XH\psi = XE\psi = E(X\psi)$ であるから $X\psi$ も同じ

⁵本稿では電子のスピン (固有角運動量) は考えない。

固有値の状態になる。つまり量子系の非自明な対称性はスペクトルの縮退を招く。そのような保存量同志の交換子はヤコビ律 $[H, [X, Y]] = [[H, X], Y] - [[H, Y], X]$ により再び保存量となり、物理量のなすリー代数の部分代数 (量子系の symmetry algebra) をなすことは古典論と同様である。このとき縮退した各固有空間 (古い用語では「多重項」) は symmetry algebra の表現空間となり、その次元が縮重度である。

水素型原子の場合、エネルギースペクトル E_n は l にも m にも依らず $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ 重に縮退している。これは symmetry algebra $so(4)$ (13)–(15) により説明される。まず磁気量子数 m に依らないことはハミルトニアンの等方性 $[H, \mathbf{L}] = 0$ に起因し、角運動量のなす $su(2)$ 部分代数 (13) から従う。方位量子数 l は $su(2)$ の $2l+1$ 次元既約表現の最高ウェイトを指定しており、磁気量子数 m は表現空間の基底をラベルする。より非自明なのはエネルギー固有値が方位量子数 l にも依らないことである。例えば 3s, 3p, 3d に含まれる 9 個の状態は全て E_3 に縮退している。これは保存量 \mathbf{A} の存在によるもので、 $1/r$ 型ポテンシャルに固有の縮退である。比較のため、例えば $\frac{c}{r^2} - \frac{k}{r}$ というポテンシャルではエネルギースペクトルは

$$E_{p,l} = -\frac{2k^2\mu}{\hbar^2} \left[2p+1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8c\mu}{\hbar^2}} \right]^{-2}$$

となる [4]。ここで $l = 0, 1, 2, \dots$ は方位量子数であり、 p は非負整数をとる。等方的なので磁気量子数については縮退しているが、それ以上の縮退、即ち方位量子数によるバラエティーが p の自由度に吸収されるのは $c = 0$ のときだけで、 $E_{n-l-1,l} = E_n$ となることが分かる。

5 Pauli の解

エネルギー固有値 $E < 0$ の定常状態を考えて

$$\mathbf{X}^\pm = \frac{\mathbf{L} \pm \tilde{\mathbf{A}}}{2} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} / \sqrt{-2\mu E b^2} \quad (17)$$

とおこう。(13)–(15) から $[X_j^\alpha, X_k^\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{jkl}X_l^\alpha$ であるので、 \mathbf{X}^+ と \mathbf{X}^- は独立に $su(2)$ をなす。また $\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{A} = 0$ により

$$\frac{\mathbf{L}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^2}{4} = (\mathbf{X}^+)^2 = (\mathbf{X}^-)^2 = \hbar^2 j(j+1)$$

とおける。 $\mathbf{X}^+, \mathbf{X}^-$ が作用する $su(2)$ の $2j+1$ 次元既約表現のコピーを二つ用意し、そのテンソル積の基底を $|j, m\rangle \otimes |j, m'\rangle$ ($m, m' = -j, j+1, \dots, j$) とする。このとき軌道角運動量の成分 $L_3 = X_3^+ + X_3^-$ の最大固有値が $2j\hbar$ となることから $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。一方 (16) は $2\mu b^2 E(\mathbf{L}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^2 + \hbar^2) = -1$

となるから $2j+1=n$ とおけば $E = E_n$ ($n \geq 1$) が得られる。縮重度はテンソル積表現の次元なので n^2 である。

水素型原子のエネルギースペクトル E_n をこのようにして導いたのは Pauli[5] であり, Schrödinger が (9) から同じ結果を得る数ヶ月前のことであった。

交換関係から $\tilde{\mathbf{A}}$ は L_3 の極大状態の間の遷移 $(\tilde{A}_1 + i\tilde{A}_2)(|q, q\rangle \otimes |q, q\rangle) = \text{const.}|q+1, q+1\rangle \otimes |q+1, q+1\rangle$ ($0 \leq q \leq j-1$) を引き起こすことが分かる。symmetry algebra の花形 \mathbf{L} の影で \mathbf{A} は黒子として様々な角運動量状態を結びつけ縮退させている。このような描像は極座標による Schrödinger 方程式の変数分離に準拠する。放物座標による変数分離を行えば H, L_3, A_3 の同時固有状態を記述する波動関数が得られる [4]。

6 Fock と Bargmann の 4 次元解釈

\mathbf{L} と \mathbf{A} が $so(4)$ を成す機構をもう少し観察しよう。以下では $H = E < 0$ のエネルギー固有状態への作用だけに話を限り, 定数 $p_4 = \sqrt{-2\mu E}$ を用いて $\tilde{A}_j = A_j/(p_4 b)$ とおく。これは (8), (17) と同じ規格化である。

$so(4)$ は 4 次元空間の無限小回転, 即ち球面 $S^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$ を保つ 6 個の 1 階微分作用素 $U_{\rho\sigma} = -U_{\sigma\rho} = u_\rho \frac{\partial}{\partial u_\sigma} - u_\sigma \frac{\partial}{\partial u_\rho}$ のなすリー代数

$$[U_{\lambda\mu}, U_{\rho\sigma}] = \delta_{\lambda\sigma} U_{\mu\rho} + \delta_{\mu\rho} U_{\lambda\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \quad (18)$$

と捉えるのが一番自然である。 $V = (V_{\rho\sigma})$ を

$$V = \frac{1}{i\hbar} \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 & -\tilde{A}_1 \\ L_3 & 0 & -L_1 & -\tilde{A}_2 \\ -L_2 & L_1 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と定めると, 確かに (13)–(15) は (18) で $U \rightarrow V$ とした交換関係と同値である [6]。しかも L_j は元々 1 階微分作用素として実現されている。一方 \tilde{A}_j は (11) で定義され一見複雑だが, $H = E$ (定数) とおき, 運動量表示 $x_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}$ に移ればやはり 1 階微分作用素となる。このとき (11) の最後の項 $-2i\hbar p_j$ だけは掛け算作用素だが, ゲージ変換により斉次 1 階微分作用素に整形できる。具体的には $g = (p_4^2 + \mathbf{p}^2)^{-2}$ として

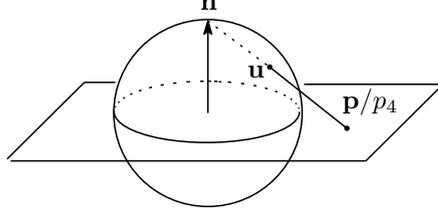
$$g^{-1} V_{i4} g = \sum_{l=1}^3 \left(\frac{p_i p_l}{p_4} + \delta_{il} \frac{p_4^2 - \mathbf{p}^2}{2p_4} \right) \frac{\partial}{\partial p_l},$$

$$g^{-1} V_{ij} g = p_i \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial}{\partial p_i}$$

を得る ($1 \leq i, j \leq 3$)⁶。大分綺麗になった。実は $g^{-1} V_{\rho\sigma} g$ は初めて出てきた球面 S^3 上の微分 $U_{\rho\sigma}$ を運動量空間 \mathbb{R}^3 へ投影したものになっている。こ

⁶ p_4 は $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とは独立な定数である。

れにより V , 従って \mathbf{L} と \mathbf{A} が $so(4)$ の定義関係式 (18) を満たすことの説明がつく [7, 8]. \mathbb{R}^4 の中に球面 S^3 と平面 \mathbb{R}^3 を埋め込んで投影する様子を图示すると以下の様になる.



$\mathbf{n} = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, 0)$ とおくと

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}^2 - p_4^2}{\mathbf{p}^2 + p_4^2} \mathbf{n} + \frac{2p_4}{\mathbf{p}^2 + p_4^2} \mathbf{p}$$

であり, このとき $U_{\rho\sigma} = g^{-1}V_{\rho\sigma}g$ が成り立つ.

7 4次元球面調和関数

エネルギー $E (< 0)$ に対応する波動関数の運動量表示 $\psi = \psi(\mathbf{p})$ に (16) を作用させた式は $\frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} V_{\rho\sigma}^2 \psi = \left(1 - \frac{1}{(\hbar b p_4)^2}\right) \psi$ と書けることに注意しよう. 左辺の作用素は2次のカシミール元と呼ばれ, symmetry algebra $so(4)$ の任意の元 $V_{\mu\nu}$ と可換である. 従って右辺の $\hbar b p_4$ が本質的にエネルギーのみに依存するのは自然である. ゲージ変換した波動関数 $\Psi = g^{-1}\psi$ は

$$\frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} U_{\rho\sigma}^2 \Psi = \left(1 - \frac{1}{(\hbar b p_4)^2}\right) \Psi \quad (20)$$

を満たす. これは4次元の (S^3 上の) 球面調和関数の満たす方程式であることを説明しよう [7, 8]. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ を \mathbb{R}^4 の自然な直交座標とする⁷. ラプラシアン $\Delta = \sum_{\rho=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial u_\rho^2}$ と次数を測るオイラー作用素 $\delta = \sum_{\rho=1}^4 u_\rho \frac{\partial}{\partial u_\rho}$ の関係

$$|\mathbf{u}|^2 \Delta = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} U_{\rho\sigma}^2 + \delta(\delta + 2)$$

を確かめるのは易しい. ラプラス方程式 $\Delta P = 0$ の l 次同次多項式解を $P = |\mathbf{u}|^l Y_l$ と表すとき, S^3 上で定義される Y_l が l 次球面調和関数であり,

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} U_{\rho\sigma}^2 + l(l+2)\right) Y_l = 0$$

を満たす. 主量子数 $n = l+1 = 1, 2, \dots$ を導入し, これと (20) で $\Psi = Y_{n-1}$ としたものを同定すると $p_4 = \sqrt{-2\mu E}$, $b^{-1} = Ze^2\mu$ からエネルギースペクトル $E = E_n$ が再現される.

⁷条件 $|\mathbf{u}| = 1$ を課さない.

E_n の縮重度はラプラス方程式 $\Delta P = 0$ の $n - 1$ 次同次多項式解の数に他ならない。一般に 4 変数単項式 $u_1^{d_1} u_2^{d_2} u_3^{d_3} u_4^{d_4}$ で d 次のは $\binom{d+3}{3}$ 個ある。 ΔP は $n - 3$ 次同次式なので $n - 1$ 次同次多項式の総数から方程式の個数を引けば

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2$$

となり, 4, 5 節で言及した縮重度を再現する。

運動量表示の波動関数と 4 次元球面調和関数を結びつけたのは Fock[7] である。Bargmann [8] が Pauli の \mathbf{A} と Fock の球面調和関数を $so(4)$ のカシミール元を用いて結びつけたのはその数ヵ月後であったという。

8 スペクトル生成代数

symmetry algebra は縮退した各固有空間に作用していた。これに異なるエネルギー状態間の遷移を引き起こすオペレーターを追加して, 「スペクトル生成代数」へと拡大し⁸, 束縛状態全体がその無限次元既約表現となる状況をつくり出すことができる。まず $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ を

$$T_2 = (\mathbf{r}\mathbf{p}) - i\hbar, \quad T_{2\pm 1} = \frac{b\hbar}{2} r\mathbf{p}^2 \pm \frac{r}{2b\hbar} \quad (21)$$

により導入する。これらは $so(2, 1)$ の交換関係

$$[T_1, T_2] = -i\hbar T_3, \quad [T_2, T_3] = i\hbar T_1, \quad [T_3, T_1] = i\hbar T_2$$

を満たす。Schrödinger 方程式 (9) に左から r をかけた式は, $e^{-\alpha} = \hbar\sqrt{-2\mu E b^2}$ を用いて

$$\left(T_1 \operatorname{sh}\alpha + T_3 \operatorname{ch}\alpha + \hbar e^\alpha \right) \psi = 0$$

と書けて, 更に $so(2, 1)$ の交換関係を用いると $e^{-i\alpha T_2/\hbar} (T_3 + \hbar e^\alpha) e^{i\alpha T_2/\hbar} \psi = 0$ となる。つまりこのゲージでは $H - E$ が実効的に $T_3 + \hbar e^\alpha$ になり, T_3 がハミルトニアン役割をする。 $so(2, 1)$ の交換関係は $su(2) \simeq so(3)$ に比べて一箇所だけ符号が逆である。両者は複素リー代数 $sl(2, \mathbb{C})$ の異なる実型であり, ユニタリー表現を考えるとその違いがものをいう。実際 $so(2, 1)$ は T_3 の固有値が $\{n\hbar | n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ となる特徴的な無限次元既約ユニタリー表現を持ち, これに対応する関係式 $n + e^\alpha = 0$ として主量子数 n の束縛状態のスペクトル $E = E_n$ 全体を包括する。 $T_1 \pm iT_2$ は T_3 の固有値を $\pm\hbar$ シフトする。このように T_j による定式化は本質的に Schrödinger 方程式の動径部分 (ラゲール陪関数に関係した 2 階線形微分方程式) の演算子形式に相当する。

⁸“symmetry algebra” や “spectrum generating algebra” は必ずしも標準化した用語ではない。

注と参考文献

- [1] H. Goldstein, *Am. J. Phys.* **43** (1975) 1737, **44** (1976) 1123.
- [2] 例えば H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics* (1930) に “It has been rumoured that the “group pest” is gradually being cut out of quantum physics.” と言及されている. この他 B. G. Wybourne, *Int. J. Quantum Chem. Symp No. 7* (1973) 35 など.
- [3] A. Bohm, Y. Ne’eman and A. O. Barut eds. *Dynamical groups and spectrum generating algebras* vol. I & II, World Scientific (1988). 文献 [5, 7, 8, 10] など (英訳も含む) が収録されている.
- [4] ランダウ・リフシッツ, 「量子力学 1」, 東京図書 (1967).
- [5] W. Pauli, *Z. Physik.* **36** (1926) 336.
- [6] V の形は示唆的で, \mathbf{A} は相対論的起源を持つ保存量ではないかと考えさせる. 実際 J. P. Dahl, *J. Phys. A* **30** (1997) 6831 では相対論的荷電粒子系を $1/c^2$ までの近似で扱い, ローレンツブーストに付随する保存量を 2 体の重心系でみたものが \mathbf{A} になると主張している. しかしこの論文では (39)–(42) 式において結局ニュートンの運動方程式が用いられているので, それと独立に保存量 \mathbf{A} を導いたことになっていないのが残念である.
- [7] V. Fock, *Z. Physik.* **98** (1935) 145.
- [8] V. Bargmann, *Z. Physik.* **99** (1936) 576.
- [9] M. Bander and C. Itzykson, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 330.
- [10] 例えばレビューとして B.G. Adams, J. Cizek and J. Paldus, in *Advances in quantum chemistry* **19** Per-Olov Löwdin eds. Academic Press (1987).