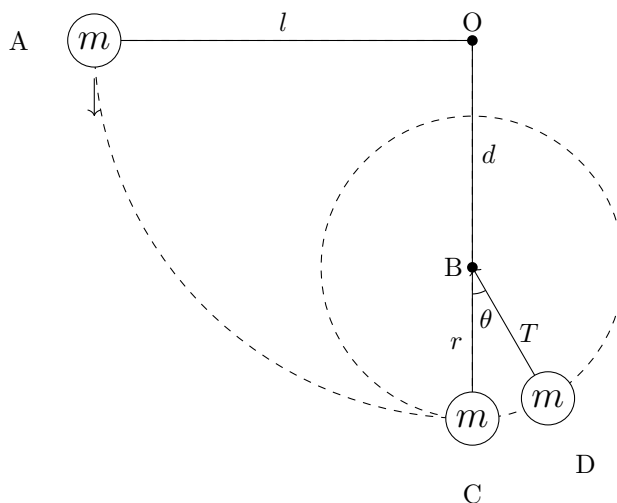


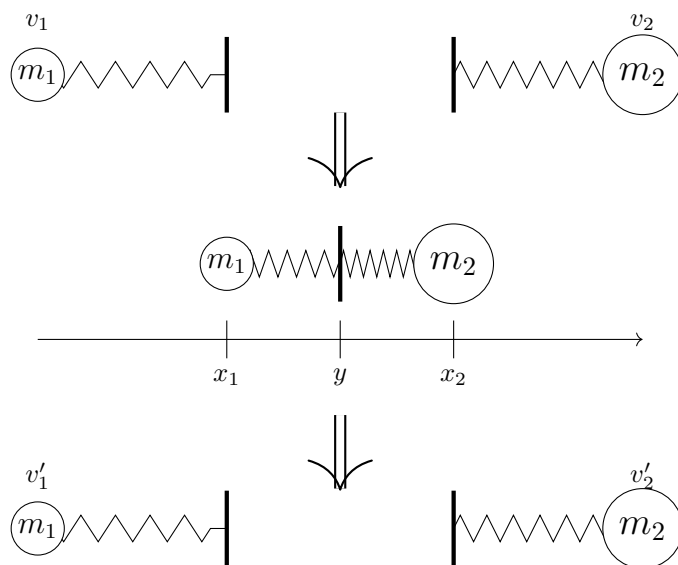
以下では物体 m の質量は m 、物体 M の質量は M とし、重力加速度は g とする。

[3] 図のように長さ l の紐でつながれた物体 m があり、その反対側の端点は O につながれている。 m を A において手を離すと C まで円を描きながら落ちていく。 C に到達した瞬間に紐が固定された点 B に接触し、そこから B を中心とする半径 r の円運動をしながら上っていく。この時 $\angle CBD = \theta$ とし、 m に働く張力を T とする。



- (i) m が D にあるときの速度 v と張力 T を求めよ。
- (ii) m が永続的に半径 r で円運動を続けるための条件を求めよ。

[4] 図のように、バネ定数 k_1 、自然長 l_1 のバネにつながれた質量 m_1 の物体 1 と、バネ定数 k_2 、自然長 l_2 のバネにつながれた質量 m_2 の物体 2 がある。バネの質量は無視できる。物体 1, 2 の初速度はそれぞれ v_1, v_2 ($v_1 > v_2$) であり、時刻 $t = 0$ に原点において、二つのバネが自然長の状態で接触した。



- (i) バネが接触している状態での運動方程式を書きなさい。ただし、物体 1, 2 の位置を x_1, x_2 , 接触点の位置を y とする。
- (ii) (i) の運動方程式の解を求めよ。
- (iii) バネが最も縮む時刻 t_1 , その時の長さ l'_1, l'_2 を求めよ。バネは再び自然長に戻った瞬間に離れる。その時刻 t_2 を求めよ。
- (iv) バネが離れた後の物体 1, 2 の速度 v'_1, v'_2 を求めよ。
- (v) バネが接触してから離れる過程に対して、エネルギーと運動量の保存則を適用して v'_1, v'_2 を求め、(iv) の結果と比較せよ。
- (vi) 一連の運動を衝突とみなすと、跳ね返り係数 e の値はいくつか。

解答例

[3] (i) エネルギー保存則を用いて以下のように v が表される。

$$mg(l - r(1 - \cos \theta)) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \because v = \sqrt{2g(l - r(1 - \cos \theta))} \quad (1)$$

動径方向についての運動方程式から張力 T は次のように表される。

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{r} &= T - mg \cos \theta \\ m \frac{2g(l - r(1 - \cos \theta))}{r} &= T - mg \cos \theta \\ T &= mg \left(\frac{2l}{r} - 2 + 3 \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (2)$$

(ii) m が永続的に半径 r で円運動を続けるということは $T > 0$ が常に保たれることと同値であるから求める条件は以下の通りである。

$$T_{\min} = T_{\pi} > 0 \quad \because 2l > 5r \quad (3)$$

[4] (i) 二つのバネの接触点の位置を $y = y(t)$ とする。 $y(0) = 0$ である。バネが接触している状態での運動方程式は

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1(y - x_1 - l_1), \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - y - l_2). \quad (5)$$

(ii) 作用・反作用の法則から（または全外力が 0 なので） $k_1(y - x_1 - l_1) - k_2(x_2 - y - l_2) = 0$ であり、

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。また、(4)/ k_1 - (5)/ k_2 から、 y によらない関係式

$$\frac{m_1 \ddot{x}_1}{k_1} - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{k_2} = (y - x_1 - l_1) + (x_2 - y - l_2) = x_2 - x_1 - l_1 - l_2 \quad (7)$$

が得られる。(6) により、(7)の左辺 $= m_1(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})\ddot{x}_1 = -m_2(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})\ddot{x}_2$ なので、以下の2式が従う。

$$\frac{m_1}{k} \ddot{x}_1 = x_2 - x_1 - l_1 - l_2, \quad (8)$$

$$-\frac{m_2}{k} \ddot{x}_2 = x_2 - x_1 - l_1 - l_2. \quad (9)$$

(8)/ m_1 + (9)/ m_2 をとると

$$\frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}{k} = \frac{x_2 - x_1 - l_1 - l_2}{m}. \quad (10)$$

ただし (8)-(10) で、以下で定義される k, m を用いた。

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (11)$$

m は換算質量と呼ばれる。 k は直列したバネの合成バネ定数である。詳しくは末尾の補足2を参照のこと。(10) は単振動型の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} z = -\frac{k}{m} z, \quad z = x_2 - x_1 - l_1 - l_2 \quad (12)$$

であるから、その一般解は、任意定数 A, δ を用いて

$$z = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \delta\right). \quad (13)$$

初期条件 $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_2 - v_1$ を満たすように A, δ を定めると

$$x_2 - x_1 = l_1 + l_2 + (v_2 - v_1) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right). \quad (14)$$

外力がないので重心は等速度運動する．このことと初期条件から

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} t. \quad (15)$$

(14) と (15) から、バネが接触している状態における 2 物体の位置

$$x_1 = -l_1 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} t + \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad (16)$$

$$x_2 = l_2 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} t + \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (17)$$

を得る．初項は初期値，第 2 項は重心の並進運動の寄与，第 3 項はバネの伸縮による寄与を表している．速度は

$$\dot{x}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad (18)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (19)$$

で与えられる．(16) と (4) から接触点の位置 y も

$$y = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} t + \left(\frac{-k_2}{k_1 + k_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (v_1 - v_2) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (20)$$

と求まる．(もちろん (17) と (5) から求めても同じ結果になる．) 二つのバネの長さは

$$y - x_1 = l_1 - \frac{k_2 (v_1 - v_2)}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad x_2 - y = l_2 - \frac{k_1 (v_1 - v_2)}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right). \quad (21)$$

(iii) (21) から、二つのバネは同時に最も縮み、同時に自然長に戻ることがわかる．

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad l'_1 = l_1 - \frac{k_2 (v_1 - v_2)}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad l'_2 = l_2 - \frac{k_1 (v_1 - v_2)}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad t_2 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (22)$$

(iv) (18), (19) で $t = t_2$ とおけばよい．

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (23)$$

(v) 運動量とエネルギーが保存する条件

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} \quad (24)$$

の解は二つある．一つは自明な解 $v'_1 = v_1, v'_2 = v_2$ であり，もう一つは (23) に一致する．

(vi) (23) から

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = 1. \quad (25)$$

従って完全弾性衝突である．このことはエネルギーが保存することと整合している．

補足 1．運動量とエネルギーは、バネが縮んでいる最中も一定値に保たれている．

運動量については (15) を時間で微分すれば

$$\frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (26)$$

実際、これを満たすように解いたのが (18), (19) であった．バネが接している状態でのエネルギーは

$$E = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{k_1(y - x_1 - l_1)^2}{2} + \frac{k_2(x_2 - y - l_2)^2}{2} \quad (27)$$

で与えられる．最初の 2 項が運動エネルギー，後の 2 項がバネの弾性エネルギーである．前者に (18), (19), 後者は (21) を代入すると, t によらず初期値に等しくなること, 即ち $E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ が確認できる．運動量と同様に, エネルギー保存についても, 解を用いずに, 運動方程式だけを使って示すこともできる．実際, (27) を微分して (4), (5) を用いると

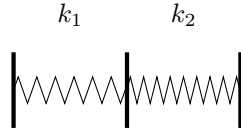
$$\frac{dE}{dt} = m_1 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + k_1(y - x_1 - l_1)(\dot{y} - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - y - l_2)(\dot{x}_2 - \dot{y}) \quad (28)$$

$$= \dot{x}_1 k_1(y - x_1 - l_1) - \dot{x}_2 k_2(x_2 - y - l_2) + k_1(y - x_1 - l_1)(\dot{y} - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - y - l_2)(\dot{x}_2 - \dot{y}). \quad (29)$$

ここで, $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ に比例する項は自明に相殺している．残るのは $\dot{y}$ に比例する項 $(k_1(y - x_1 - l_1) - k_2(x_2 - y - l_2))\dot{y}$ であるが, (5) のすぐ後に述べたように, これは全外力=0 により 0 である．

補足 2. バネを直列した場合と並列した場合の合成バネ定数について．

(i) 直列に接続した時の合成バネ定数



バネ定数 k_1 および k_2 のバネ 1,2 を直列して張力 T で引っ張る．二つのバネの及ぼしあう力の大きさは作用・反作用の法則から一致する．従って, 自然長からの伸びをそれぞれ d_1, d_2 とすると

$$T = k_1 d_1 = k_2 d_2 = k(d_1 + d_2). \quad (30)$$

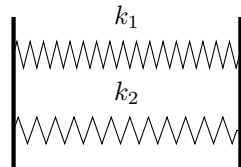
ここで k は合成系を一つのバネと見た場合のバネ定数である．

$$\frac{d_1}{k} = \frac{d_1 + d_2}{k_1}, \quad \frac{d_2}{k} = \frac{d_1 + d_2}{k_2} \quad (31)$$

の和から, k は以下で与えられることがわかる．

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (32)$$

(ii) 並列に接続した時の合成バネ定数



バネ定数 k_1, k_2 , 自然長 l_1, l_2 のバネ 1,2 を並列する．長さ L にするのに必要な張力は

$$(L - l_1)k_1 + (L - l_2)k_2 = (L - l)k. \quad (33)$$

ここで, 合成系の自然長を l , バネ定数を k とした．これらは, L が任意であることから以下のように求まる．

$$k = k_1 + k_2, \quad l = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{k_1 + k_2}. \quad (34)$$