1 次元の運動

[1]
　(1) あるレーシングカーは静止状態から 3 秒で時速 200Km に達するという。簡単のため等加速度運動とすると、ドライバーは何 g を感じるか。
　(2) あるジェット機は静止状態から 2m/s^2 で加速し、100m/s になったところで離陸する。離陸に必要な距離を求めよ。

[2] 50cm 飛びあがれる人がいる。以下鉛直方向の運動を考える。
　(1) 地面を離れる瞬間の速さ v_0 と、ジャンプしてから着地するまでの滞空時間 T を求めよ。
　(2) 月面で同じ v_0 で飛び上がると何 m に達するか。またその滞空時間を求めよ。

[3] 軽い糸に 3 個のおもりをある間隔でつけて鉛直につるし、静止させた後に放したら、 0.2 秒の等間隔で床におもりが当たる音が聞こえた。それぞれのおもりの始めの高さを求めよ。

[4] 次のような直線上の運動を定性的に、可能ならば定量的に記述せよ。
　(1) 加速度 a と速度 v が常に比例する (定数倍となる) ような運動。
　(2) 加速度 a と変位 x が常に比例する (定数倍となる) ような運動。

解答例

[1]

(1) 加速度を a とすると

$$a = \frac{200 \times 1000\mathrm{m}}{3600\mathrm{s} \cdot 3\mathrm{s}} \simeq 18.5\mathrm{m/s^2}.$$

これは 何 g か、といえば $a/g = 1.88...$ なので ほぼ $1.9g$。

(2) 離陸速度 $v = 100\mathrm{m/s}$、加速度を $a = 2\mathrm{m/s^2}$ とおく。離陸までの走行距離 x 、走行時間 t は以下の関係にある。

$$v = at, \quad x = \frac{a}{2}t^2. \quad \therefore x = \frac{v^2}{2a} = 2500\mathrm{m}.$$

[2] 地面を離れる瞬間の速さを v_0、最高点の高さを $h = 0.5$ m、滞空時間を T とする。時刻 t における地面からの高さを $x(t)$、上向きの速さを $v(t)$ とすると、

$$x(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2, \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 - gt. \quad x(T) = 0\ (T \neq 0) \text{ により } T = \frac{2v_0}{g}.$$

$x(t)$ の最大値は $v_0^2/(2g)$ である。よって

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad \therefore\ v_0 = \sqrt{2gh} \simeq 3.1\mathrm{m/s}, \quad T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2v_0}{g} \simeq 0.63\mathrm{s}.$$

(2) 月面での重力加速度は $g' = 0.17g$ である。(理科年表には太陽系の他の惑星表面での重力加速度も載っています。興味ある人は調べてみましょう。) 月面での最高到達高度と滞空時間を h', T' とすると

$$h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{h}{0.17} \simeq 2.9\mathrm{m}, \quad T' = \frac{2v_0}{g'} = \frac{T}{0.17} \simeq 3.7\mathrm{s}.$$

宇宙服を着ていると動きにくいけれど, これくらいジャンプ出来たら楽しい。

[3] 高さ h から初速度 0 で落下する物体の滞空時間は $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ である。おもりの始めの高さを下から順に h_1, h_2, h_3 とすると

$$\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 0.2\mathrm{s}, \quad \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0.4\mathrm{s}, \quad \sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 0.6\mathrm{s} \quad \text{よって}$$

$$h_1 \simeq 0.19\mathrm{m}, \quad h_2 \simeq 0.78\mathrm{m}, \quad h_3 \simeq 1.76\mathrm{m}.$$

等加速度運動では距離は運動時間の 2 次関数。

[4]

加速度 a, 速度 v, 変位 (位置)x は時刻 t の関数であり、以下の関係にある.

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

比例定数を k とすると、題意は k は t に依らない定数ということ。以下 $v > 0$ は右向きの運動とする.

(1) $a = kv$. 以下の考察から示唆されるように, k の正負で定性的に非常に異なる運動をする.

$k>0$ の場合．例えば $v>0$ とし，右に動いていると，加速度も正なので速くなり，従って加速度もますます大きくなる．こうして速度も加速度も際限なく大きくなっていく．$v<0$ でも同様.

$k<0$ の場合．例えば $v>0$ とし，右に動いていると，加速度は負なので減速する．それでもまだ右に進んでいれば加速度は負で更に減速するが，速度も小さいくなっているので加速度の絶対値も小さく，ブレーキのかかり具合は弱くなる．$a=kv$ により，右に動いている限り $v>0$ であり，$a<0$ なので左向きに加速するので減速する．もしあるとき止まったら $v=0$ なので $a=0$ であり，以降は速さは変わらずに静止することになる．

以上の結果を定量的に記述してみよう．$a=kv$ は

$$\frac{dv}{dt}=kv$$

と書ける．これは $v=v(t)$ という t の関数がみたす **微分方程式**，微分した関数ともとの関数の関係式である．これを満たす関数 $v(t)$ を求めることを「微分方程式を解く」という[1]．今の場合は次のように解ける．(簡単のため $v>0$ と仮定しよう．)

$$k=\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\log v.\quad \text{両辺を } t \text{ で積分して } kt+c=\log v\ \ (c \text{ は } t \text{ に依らない定数}).$$
$$\therefore\ v=e^{c+kt}.\quad t=0 \text{ で } v=v_0 \text{ とすると } e^c=v_0 \text{ とおくべきことがわかる．} \boxed{v=v_0e^{kt}}.$$

$k>0, k<0$ のとき，速さはそれぞれ時間に関して指数関数的に増大，減衰する．

勿論 $a=kv$ も同様．位置 x は

$$\frac{dx}{dt}=v=v_0e^{kt}.\quad \text{両辺を } t \text{ で積分して } x+b=\frac{v_0}{k}e^{kt}\quad (b \text{ は } t \text{ に依らない定数}).$$
$$t=0 \text{ で } x=x_0 \text{ とすると } x_0+b=\frac{v_0}{k}.\quad \therefore b=\frac{v_0}{k}-x_0.\ \boxed{x=x_0+\tfrac{v_0}{k}(e^{kt}-1)}.$$

x も t に関して指数関数的に振る舞う．$k>0$ であれば際限なく増大する．$k<0$ であれば

$$t\to+\infty \text{ で } x\to x_0-\frac{v_0}{k}=x_0+\frac{v_0}{|k|}$$

なので, 初期値から $\frac{v_0}{|k|}$ ずれた位置に漸近してゆく．これを「時刻 ∞ で $x_0+\frac{v_0}{|k|}$ において静止する」などとも表現する．

$t=0$ において $x=x_0, v=v_0$ というような条件を**初期条件**という．上の v,x では積分の際の任意定数 c,b を初期条件にあうように定めた．このような解 x,v を，**初期条件を満たす解** という．

(2) 各人の課題とする．これも k の正負で振る舞いは定性的に異なる．特に $k<0$ の場合は単振動 (後述) に関係し，極めて重要である．

[1] 2 次方程式など代数方程式の解は数，一方微分方程式の解は関数.