平面上の運動

今回の問題は，数式，数値の取り扱いのウェイトがやや大きい.「物理」よりもこれらの task をやりきるトレーニングになっている面がある．数値の計算は適宜，計算機を用いるとよい．でも，結果がケタ違いにくるったりしないよう常に常識，直感を働かせよう.

[1] 少年野球のコーチは野手にバウンドを気にせず一塁に送球するように指導することがある.

(i) 初速度の大きさ v，仰角 θ でボールを投げ，水平距離 L，高さは元と同じ地点にノーバウンドで到達させるのに要する時間 t_0, を求めよ．ただし，空気抵抗は無いものとする.

(ii) もしバウンドしてもその効果が速度の鉛直成分が -1 倍になるだけとすると，水平距離 L の一塁ベース上に高さを気にせずに送球するための最短時間 t_1 はいくらか.

(iii) 初速 $v = 100$km/h で 水平距離 $L = 25$m 送球するとし，重力加速度を $g = 10$m/s として $t_0 - t_1$ を概算せよ.

数値計算には $|\delta| < 1$ のとき近似式

$$\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{16} - \frac{5\delta^4}{128} + \frac{7\delta^5}{256} + O(\delta^6) \tag{1}$$

($O(\delta^n) = \delta^n$ 以上に比例する補正項) を用いるとよい.

[2] 位置ベクトル $\vec{r}$ の成分が

$$x = r_0 e^{\alpha t}\cos\omega t, \quad y = r_0 e^{\alpha t}\sin\omega t, \quad z = 0 \tag{2}$$

で与えられる運動について考察しよう．ただし r_0, α, ω は定数とする.

(i) どのような動きを表しているか，運動の軌跡を図示してみよ.

(ii) 速度 $\vec{v}$，加速度 $\vec{a}$ を計算せよ.

以下常に $z = 0$ であるとし，ベクトルは xy 成分からなる 2 次元のものを考える．$\vec{r}$ に平行な単位ベクトル $\vec{e}_r$ と $\vec{r}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}_\theta$ を

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \tag{3}$$

と定める．2 次元ベクトル $\vec{b}$ を (3) により一意的に展開する式

$$\vec{b} = b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta \tag{4}$$

により，その動径成分 b_r と角度成分 b_θ を定義する.

(iii) 速度，加速度についてそれぞれの動径成分と角度成分の値を求めよ.

解答例

[1] L, v が与えられたという設定である．

(i) 水平方向，鉛直方向に分解して運動を考えると到達に要する時間はそれぞれ

$$t = \frac{L}{v\cos\theta}, \quad t = \frac{2v\sin\theta}{g}. \tag{5}$$

この二つの時間を等しいとおくと以下の方程式を得る．

$$\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) = \left(\frac{Lg}{2v^2}\right)^2. \tag{6}$$

ノーバウンドで到達させられるためにはこれが実根を持つ必要がある．そこで以下では無次元の量

$$\delta = \frac{Lg}{v^2} \tag{7}$$

を導入し，$0 < \delta < 1$ と仮定する．このとき (6) を解いて

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1+\delta} \pm \sqrt{1-\delta}}{2}. \tag{8}$$

プラス符号に対応する大きい $\sin\theta$ の値は「山なり」の送球である．通常のノーバウンド送球はマイナス符号の $\sin\theta$ の値に対応すると考えてよい．従って (5) に代入して

$$t_0 = \frac{v}{g}\left(\sqrt{1+\delta} - \sqrt{1-\delta}\right) \simeq \frac{v}{g}(\delta + \frac{\delta^3}{8}) = \frac{L}{v}(1 + \frac{\delta^2}{8} + \frac{7\delta^4}{128}) \tag{9}$$

参考までに，もし $|\delta| \ll 1$ であれば $\theta \simeq \delta/2$ となる．

(ii)

$$t_1 = \frac{L}{v} \tag{10}$$

(iii) 時速 100km はおよそ $v = 27.8\text{m/s}$ である．また $\delta = 0.324$.

$$t_0 - t_1 = \frac{L}{v}(\frac{\delta^2}{8} + \frac{7\delta^4}{128}) \simeq 0.0124 \text{ sec} \tag{11}$$

この間ボールはおよそ距離 $v(t_0 - t_1) \simeq 34\text{cm}$ 進む．参考までに近似式 (1) を用いずに (9) の最初の式を用いてコンピューターに計算させると $t_0 - t_1 = 0.0123883...\text{sec}$ となる．

以上から力学による結論は，もしグラウンドが十分硬くなめらかで，一塁手がどんな高さの送球でもエラーしない名手であれば，バウンドを気にせず全力で水平に送球すると 100 分の 1 秒程度有利.

[2]
(i) $\alpha < 0$ ならば原点に向かってスパイラルに漸近していく．$\alpha > 0$ ならば逆にスパイラルに遠ざかる．$\alpha = 0$ なら角速度 ω の等速円運動.
(ii)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \alpha r_0 e^{\alpha t} \cos\omega t - \omega r_0 e^{\alpha t} \sin\omega t \\ \alpha r_0 e^{\alpha t} \sin\omega t + \omega r_0 e^{\alpha t} \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t} \cos\omega t - 2\omega\alpha r_0 e^{\alpha t} \sin\omega t \\ (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t} \sin\omega t + 2\omega\alpha r_0 e^{\alpha t} \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) 速度と加速度の動径成分と角度成分への分解を $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$, $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$ と書くと

$$v_r = \alpha r_0 e^{\alpha t}, \quad v_\theta = \omega r_0 e^{\alpha t}, \tag{12}$$

$$a_r = (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t}, \quad a_\theta = 2\omega\alpha r_0 e^{\alpha t}. \tag{13}$$

話をはっきりさせるため $r_0 > 0, \omega > 0$ としよう．α が正でスパイラルに原点から遠ざかる運動でも $0 < \alpha < \omega$ ならば $a_r < 0$ であることに注意．同様に α が負でスパイラルに原点に近づく場合でも $|\alpha| > \omega$ ならば $a_r > 0$ である．これは不思議ではないか直感に尋ねてみよう．

$\alpha = \pm\omega$ の場合は加速度は動径成分を持たない．また $\alpha = 0$ の等速円運動の場合は $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ というよく知られた結果を再現している．