振動子，空気抵抗のある落体

[1]

質量 m の子供が長さ l のロープに吊るされたブランコに座っている．子供は十分小さいとして大きさは無視しよう．母親が角度 1 ラジアンだけ引き上げて静止させ，その後，常にブランコの振れる方向にそって mg の大きさの力で押して鉛直になった瞬間に手を放した．

(1) ロープの振れ角 θ の従う微分方程式を導け．

(2) 母親がブランコを押していた時間を求めよ．ただし $\sin\theta = \theta$ という近似を用いてよい．

[2] 静止した質量 m の質点を放し，落下させる．速さ v の 2 乗に比例する抵抗 $m\gamma v^2$ を受けるとする．

(1) 終端速度の大きさを求めよ．

(2) 運動方程式を解いて，落下開始後の任意の時刻 t における質点の速さ，位置を求めよ．

(3) 落下を開始した瞬間から終端速度で運動する別の物体との距離は $t \to \infty$ の極限でどうなるか．

解答例

今回の問題は，微分方程式による運動の解析に馴染むことが主題．計算のウェイトが大きいが，式を操るだけでなく，得られた結果がどのような運動を表しているかを常に意識したい．

[1]

(1) ブランコの描く円弧の接線方向の加速度は $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ なので

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg - mg\sin\theta. \qquad \cdots(\sharp)$$

(2) $\sin\theta = \theta$ と近似し，$\omega = \sqrt{l/g}$ と書くと，$(\sharp)$ は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta + \omega^2 = 0.$$

$\phi = \theta + 1$ とおけば ϕ は単振動の方程式

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$$

を満たすので一般解は $\phi = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$．従って

$$\theta = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - 1.$$

初期条件 $\theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = 0$ を課すと $A = 2, B = 0$．よって

$$\theta = 2\cos(\omega t) - 1.$$

$\theta = 0$ となるのは $\cos(\omega t_1) = \frac{1}{2}$．従って母親が押していた時間は

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となり，これは周期の $\frac{1}{6}$ である．

なお， 簡単のため $\sin\theta = \theta$ という近似を用いたが，θ が 1 ラジアン程度の大きさとなると，あまり精度は良くない．

[2]

(1) 終端速度の大きさを v_0 とすると $m\gamma v_0^2 = mg$ により

$$v_0 = \sqrt{g/\gamma}. \tag{1}$$

抵抗の大きさのパラメータ γ は長さの逆数の次元をもつ.

(2) 速度の鉛直上向き成分の値を $v(t)$ とし，運動方程式をたてる.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + m\gamma v^2. \tag{2}$$

即ち $-\gamma(v_0^2 - v^2) = \frac{dv}{dt}$ であり，以下のように変数分離形に書き換えられる.

$$-\gamma dt = \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{1}{2v_0}\left(\frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{v_0 + v}\right)dv \tag{3}$$

$v(t=0) = 0$ となるよう両辺を積分して

$$-\gamma t = \frac{1}{2v_0}\log\left(\frac{v_0 + v}{v_0 - v}\right). \tag{4}$$

これを v について解いて

$$v(t) = -v_0 \tanh(t\sqrt{g\gamma}). \tag{5}$$

ただし双曲線関数

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}, \quad \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \tag{6}$$

を用いた.（グラフを描いてその振る舞いをみよ．また加法定理等を導いてみよ．$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ などから $\tan, \sin, \cos$ の兄弟のような親しみの湧く人たちであると悟れます.）$\theta \to \infty$ のとき $\tanh\theta \to 1$ なので (5) は $v(t)$ が終端速度 $-v_0$ に漸近していく様子を表している.

落下開始の瞬間に高さ $x = 0$ であるとすると

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = -\frac{1}{\gamma}\log(\cosh(t\sqrt{g\gamma})). \tag{7}$$

(3) θ が正の十分大きい数であるとき

$$\log(\cosh\theta) = \log(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}) \simeq \log(e^\theta/2) = \theta - \log 2 \tag{8}$$

である．これを (7) で $t \to \infty$ の状況に適用すれば

$$x(t) \to -\frac{1}{\gamma}(t\sqrt{g\gamma} - \log 2) = -v_0 t + \frac{\log 2}{\gamma} \quad (\text{ as } t \to +\infty) \tag{9}$$

一方落下開始直後から終端速度 v_0 で運動する物体の高さ y は $y(t) = -v_0 t$ である．終端速度より小さい速さから徐々に加速するために，最終的には同じ速さ v_0 になっても距離 $\frac{\log 2}{\gamma}$ だけ遅れをとる.

参考までに $|\theta| \ll 1$ での近似式 $e^\theta = 1 + \theta + O(\theta^2)$ を使うと (5) から $v \to -gt$ $(t \to 0)$ が導かれる．これは抵抗のない自由落下と同じであるが，その理由を考えよう.