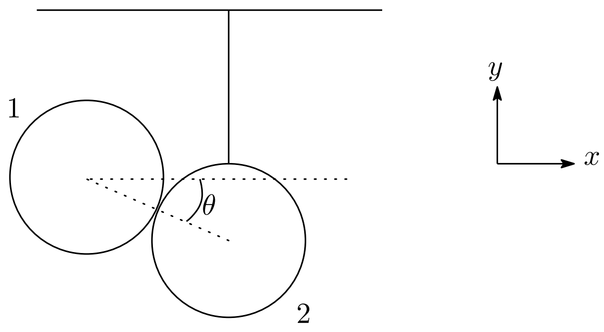
運動量と力積

[1] 質量 m で同じ大きさの滑らかな剛体球 1,2 がある．はじめ，球 2 は天井から軽い糸でつるされて静止している．そこに 球 1 が水平 ($+x$ 方向に) に速さ v で飛んできて弾性衝突した．衝突の際の角度は図の様である．



1. 衝突の際に球 2 が球 1 に及ぼす力積の大きさを P として衝突直後の 球 1 の速度 (v'_x, v'_y) を求めよ．
2. 衝突の際に糸が球 2 に及ぼす力積の大きさを Q として P と Q の関係を求めよ．
3. 衝突直後の球 2 の速さ u と P の関係を求めよ．
4. 衝突直後の 球 1 の速度 (v'_x, v'_y)，球 2 の速さ u を求めよ．
5. 衝突の前後で力学的エネルギーはどうなっているか．

解答例

[1] 二つの球について，衝突前後で運動量変化=力積 という関係式が正しく立てられれば素直に解ける．注意点は，球１，２の及ぼしあう力積は作用・反作用則から -1 倍の関係にあり，球の中心を結ぶ方向に働くこと．これは球が滑らかという仮定による．また，糸から球２へ働く力積は $+y$ 方向であり，球２は衝突直後は水平方向の速度を持つという点である．

球１について，運動量変化=力積を x, y 成分ごとに立てる．

$$mv - P\cos\theta = mv'_x, \tag{1}$$
$$m0 + P\sin\theta = mv'_y. \tag{2}$$

よって

$$v'_x = v - \frac{P}{m}\cos\theta, \qquad v'_y = \frac{P}{m}\sin\theta \qquad \cdots 1 \text{ の答え} \tag{3}$$

球２について，運動量変化=力積を x, y 成分ごとに立てる．ただし，衝突直後の球２の速度を $(u, 0)$ とする．

$$Q - P\sin\theta = 0 \qquad \cdots 2 \text{ の答え.} \tag{4}$$
$$P\cos\theta = mu \qquad \cdots 3 \text{ の答え.} \tag{5}$$

弾性衝突なので，衝突の瞬間における二つの球の中心を結ぶ方向に沿って | 接近速度 | = | 離反速度 | である．

$$|\text{接近速度}| = v\cos\theta, \quad |\text{離反速度}| = u\cos\theta - (v'_x\cos\theta - v'_y\sin\theta) \tag{6}$$

なので

$$v = u - v'_x + v'_y\tan\theta. \tag{7}$$

一方 (3) と (5) から P を消去すれば

$$v'_x = v - u, \qquad v'_y = u\tan\theta. \tag{8}$$

(7) と (8) から衝突後の速度が以下のように定まる．

$$v'_x = \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}v, \quad v'_y = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}v, \quad u = \frac{2\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}v \qquad \cdots 4 \text{ の答え.} \tag{9}$$

弾性衝突では力学的エネルギーは保存する．実際，今の場合衝突の直前と直後で位置エネルギーの変化はなく，運動エネルギーも不変であること，すなわち

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(v'_x)^2 + \frac{m}{2}(v'_y)^2 + \frac{m}{2}u^2 \tag{10}$$

が成り立つことは (9) を用いて確認できる．$\cdots 5$ の答え．