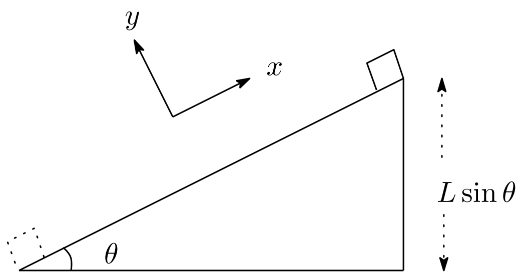
## 仕事とエネルギー

[1] 質量 $m$ の物体が角度 $\theta$ の斜面を滑り下り，斜面に沿って $L$ 進んだところで静止した．物体の速さは最初 $v$ であり，斜面との動摩擦係数を $\mu$ とする．




1. 物体の加速度の斜面方向 ($+x$ 方向) の成分 $a$ を求めよ．
2. 運動エネルギーの変化 $\Delta K$，力学的エネルギーの変化 $\Delta E$ を求めよ．
3. 重力が物体にした仕事 $W_g$，摩擦力が物体にした仕事 $W_f$ を求めよ．
4. $\Delta K, \Delta E, W_f, W_g$ の間にはどのような関係が成り立つか．

[2] ポテンシャル $U(x) = cx(x^2 - b^2)$ の下に $x$ 軸上を運動する質量 $m$ の質点がある．($b, c$ は正の定数)

1. 安定平衡点，不安定平衡点の位置を求めよ．
2. 安定平衡点の周りの微小運動は近似的に単振動で記述できる．その角振動数を求めよ．
3. 前問で，質点の力学的エネルギー $E$ を徐々に増やしていくと，ある値 $E_0$ を超えたところで有界な運動にならなくなる．そのような $E_0$ を求めよ．

# 解答例

[1]
1. 垂直抗力を $N$ とすると，運動方程式は

$$x \text{ 方向：} \quad ma = -mg\sin\theta + \mu N, \quad y \text{ 方向：} \quad N - mg\cos\theta = 0 \tag{1}$$

なので $\boxed{a = (\mu\cos\theta - \sin\theta)g}$. 題意から $a > 0$ である．斜面に沿っての等加速度運動なので， $L, v, a$ は独立ではなく，

$$L = \frac{v^2}{2a} \tag{2}$$

という関係で結ばれることに注意する．
2.

$$\Delta K = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2}, \qquad \Delta E = -\left(\frac{mv^2}{2} + mgL\sin\theta\right). \tag{3}$$

3. 今の場合，重力と摩擦力は一定であり，物体の変位の方向も一定なので，仕事は 物体に及ぼされる力と変位ベクトルの内積に等しい．具体的には

$$\boxed{W_g = mgL\sin\theta}, \quad \boxed{W_f = -\mu NL = -\mu mgL\cos\theta}. \tag{4}$$

$W_f$ では動摩擦力と変位が逆向きなのでマイナスがつくことに注意.
4. まず Newton の法則からいえることは

$$\text{物体の運動エネルギーの変化} = \text{物体になされた仕事，つまり} \boxed{\Delta K = W_g + W_f} \tag{5}$$

である．実際これは次のように確認できる．

$$W_g + W_f = -mgL(\mu\cos\theta - \sin\theta) = -mLa \overset{(2)}{=} -\frac{mv^2}{2} = \Delta K.$$

次に，物体に働く力のうち，保存力については

$$\text{保存力によりなされる仕事} = -(\text{ポテンシャルエネルギーの変化}) \tag{6}$$

が成り立つ．(5) を (6) の右辺 (の一部) に代入してちょっと移項する．すると，エネルギー保存則は [力学的エネルギー] = [運動エネルギー] + [ポテンシャルエネルギー] を用いて次のように述べることもできる．

$$\text{物体の力学的エネルギーの変化} = \text{保存力以外の力による仕事，つまり} \boxed{\Delta E = W_f}. \tag{7}$$

これを確認するのも易しい．今の場合，保存力は重力であり，それ以外の力が摩擦力である．重力のポテンシャルエネルギーは位置エネルギーなので，その変化を $\Delta U$ とすると $\Delta U = -mgL\sin\theta$ である．一般式 (6) は確かに $W_g = -\Delta U$ として成立している．よって

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U \overset{(5)}{=} \Delta U + W_g + W_f = W_f. \tag{8}$$

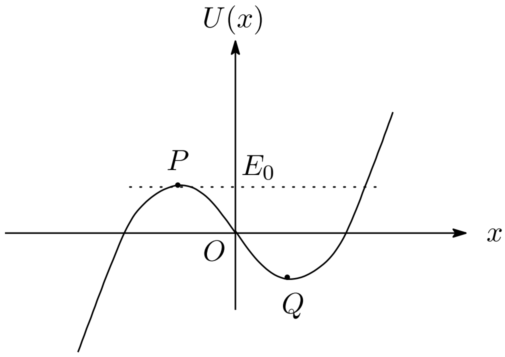
[2]

質点が位置 $x$ において受ける力 $F(x)$ は

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -c(3x^2 - b^2) \tag{9}$$

である．

1. 平衡点は力の働かない，つまり $F(x) = 0$ となる点．このうち，安定平衡点は $U(x)$ の極小点．そこからちょっとずれると元の位置に戻るように力が働く．極小以外の平衡点は不安定平衡点．




安定平衡点は $Q$ で $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$. 不安定平衡点は $P$ で $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$.

2. 今の場合，安定平衡点 $Q$ の近傍では ポテンシャルが放物線で近似できるので適当なバネ定数の単振動のポテンシャルと思うことが出来る．具体的には，ポテンシャルを $x_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ の周りで展開すればよい．$x = x_0 + y$ とおくと

$$U(x) = U(x_0 + y) \simeq U(x_0) + \overbrace{\frac{dU}{dx}(x_0)}^{=0} y + \frac{1}{2}\overbrace{\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)}^{=k\text{ とおく}} y^2 + \cdots . \tag{10}$$

このとき運動方程式は以下のように単振動のものとなる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} \implies m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dU(x_0+y)}{dy} \simeq -ky \qquad (k = 2\sqrt{3}bc) \tag{11}$$

よって求める角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}bc}{m}}. \tag{12}$$

3. 力学的エネルギー $E = \frac{mv^2}{2} + U(x)$ が保存することと，$\frac{mv^2}{2} \geq 0$ により，$U(x) \geq E$ を満たす $x$ が可動区間である．$E$ が上の図の $E_0$ を超えると可動区間が左側に無限に広がる．質点は $P$ というポテンシャルの山を乗り越えて運動エネルギーを得ながら ($U$ の値はどんどんマイナスで大きくなりながら) $x = -\infty$ に向かって進んで行く．よって求める値は $E_0 = \frac{2b^3c}{3\sqrt{3}}$.