角運動量と力のモーメント

[1] 位置 $\mathbf{r}_i$ に質量 m_i のある質点 $i = 1, 2, \ldots, n$ の集まり (n 質点系) を考える．重力がこの n 質点系に及ぼす力のモーメントの総和は，重心に全ての質量が集中した一個の質点があるとした場合の力のモーメントに等しい事を示せ.

[2] 図のように，質量 m，長さ l の細くて一様な棒が点 A でつるされている．以下，角運動量と力のモーメントは点 A を基準とする.

(i) 棒が点 A の周りに角速度 ω で回転するとき，角運動量の大きさは，ある定数 I を用いて $I\omega$ で与えられる． I (慣性モーメントという) を求めよ.

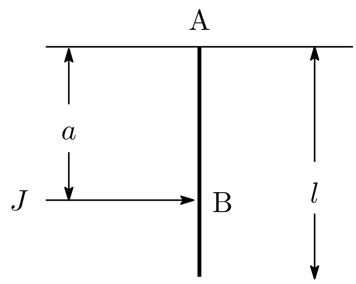
(ii) 図の点 B に水平に撃力[1]を及ぼす．これにより棒に与えられる力のモーメント $\vec{M}$ の向きを答えよ.

(iii) 点 A と点 B の距離を a , 撃力が及ぼした力積の大きさを J とする．モーメントの時間積分 $\int \vec{M} dt$ の大きさを求めよ.

(iv) 撃力の作用の直後の棒の角速度 ω を求めよ.

(v) 点 B における作用の結果として，棒は一般に点 A においても力積を受ける．その大きさ J' を求めよ.

(vi) $J' = 0$ とするためには点 B はどこに取ればよいか.



[1] きわめて短い時間 Δt だけ働くが，大きさ F は非常に大きいので，運動量に有限の変化 $|F\Delta t|$ （力積という）をもたらすもの.

解答例

[1] 重心の位置を $\mathbf{R}$, 全質量を M と書くと

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{M}.$$

鉛直下向きの重力加速度を $\mathbf{g}$ とすると勝手な基準点 $\mathbf{b}$ のまわりの重力のモーメントの総和は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}) \times m_i\mathbf{g} &= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} - \mathbf{b} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{g}\right) \\ &= \mathbf{R} \times (M\mathbf{g}) - \mathbf{b} \times (M\mathbf{g}) = (\mathbf{R} - \mathbf{b}) \times (M\mathbf{g}).\end{aligned}$$

これは 位置 $\mathbf{R}$ に質量 M の質点が一つある場合に，重力が及ぼす $\mathbf{b}$ の周りの力のモーメントに等しい．

一般に，大きさを持った物体は，質点の集まりとみなすことにより，この結果を適用できる．すなわち任意の基準点に関する重力のモーメントは重心に全質量が集中しているものと思って計算してよい．

[2](i) 棒の密度は m/l なので，A から距離 $r \sim r+dr$ の所に質量 $(m/l)dr$ の微小素片が集まったものとみなせる．一般に，質量 m の質点が，半径 r で角速度 ω の等速円運動するときの角運動量の大きさは $mr^2\omega$ であった．棒の角運動量の大きさは，これを各微小素片に適用して r について積分すればよい．

$$\int_0^l \frac{m}{l} r^2 \omega dr = \frac{ml^2}{3}\omega. \qquad \therefore I = \frac{ml^2}{3}.$$

(ii) 撃力の大きさを $\vec{F}$ とかくと，それは図で右向きである．よってモーメント $\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \vec{F}$ は紙面から手前にむかう $\odot$ 向き．

(iii) 力積の定義から，その大きさは $J = \int F dt$．(ii) によりモーメントの大きさは $M = aF$．よって

$$\int M dt = a \int F dt = aJ$$

(あるいは簡略して $J = F\Delta t$ として，$M\Delta t = aF\Delta t = aJ$ としてもよい．)

(iv) 一般に，角運動量 $\vec{L}$ の時間変化率 = 力のモーメントであった．式で書くと

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \text{あるいは両辺を時間で積分して} \ \ \vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt$$

撃力を及ぼす直前と直後の時刻を t_0, t_1 とすると上式の $\odot$ 方向の成分は $I\omega - 0 = aJ$，従って

$$\omega = \frac{Ja}{I} = \frac{3Ja}{ml^2}$$

(v) 棒の重心の初速度は $v = \frac{l\omega}{2}$．従って棒の得た全運動量は $mv = \frac{ml\omega}{2}$．これは棒の受けた全力積に等しいはず．ゆえに

$$J + J' = \frac{ml\omega}{2}$$

これを解いて

$$J' = \frac{ml\omega}{2} - J = J\left(\frac{3a}{2l} - 1\right)$$

(vi) (v) の結果から

$$a = \frac{2l}{3}$$

点 A において働く力は，a がこの値より大きいときは右向き，小さいときは左向きである．

撃力を扱っているので，この問題に重力は影響しない．どこにも g というパラメータは見当たらない．それならこの結果は摩擦のないテーブル上の細いペンにも当てはまるはず．さっそく試してみよう．