万有引力

[1] 我々の太陽は銀河系の中心からおよそ 25000 光年の距離を 1.7 億年周期で等速円運動している．地球は太陽から光でおよそ 8 分の距離を 1 年周期で等速円運動している．これだけのデータから銀河系の質量が太陽の質量の何倍あるか，概算せよ．ただし銀河系の質量は中心に集中しているとしてよい．

[2] 質量 M の質点が，相対位置 $\mathbf{r}$ の所にある質量 m の質点に及ぼす万有引力は

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

である．但し， $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると，$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(i) $\mathbf{F}$ はポテンシャル $U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}$ に付随する保存力であることを示せ．
（「補遺：2 次元，3 次元における保存力」参照のこと．）

(ii) 地表で物体を水平に放つ．もし空気抵抗などがなければ，ある速さ v_1 のとき，万有引力により地表すれすれの等速円運動をし，落下しなくなる．このような速さ v_1 を求めよ．これは第一地球脱出速度，または第一宇宙速度と呼ばれる．

(iii) 地表にある物体にある初速度を与え，あとは推進力無しに宇宙空間を運動させる．地球の重力圏から脱出できるための最小の初速度 v_2 を求めよ．これは第二地球脱出速度，または第二宇宙速度と呼ばれる．ヒントは (i).

解答例

[1] 地球の太陽のまわりの公転運動について

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_s}{r^2}.$$

ここで，r は太陽–地球間距離，v は地球の公転速度，m_s, m はそれぞれ太陽と地球の質量である．銀河中心の周りの太陽の運動については

$$\frac{m_sV^2}{R} = \frac{GMm_s}{R^2}.$$

ただし，R は銀河中心からの太陽の距離，V は太陽の速さ，M は銀河の質量．したがって

$$M = \frac{RV^2}{G} = \frac{R}{r}\left(\frac{V}{v}\right)^2 m_s.$$

$T,\ t$ を太陽と地球の公転周期とすると $V = 2\pi R/T, v = 2\pi r/t$ となる．これを代入して

$$M = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2 m_s.$$

与えられたデータを代入して計算すると

$$M = 1.53 \times 10^{11} m_s.$$

[2]

(i)

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

を示せばよい．$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}$ を用いて，例えば x 成分は以下の様に確認できる．

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = GMm\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}GMm\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -GMm\frac{x}{r^3} = F_x.$$

(ii) 物体の質量を m，地球の半径 R，質量 M とすると

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} = mg, \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} \simeq 7.9\mathrm{Km/s}.$$

これは音速の約 23 倍.

(iii) 運動する物体の速さを v，地球の中心からの距離を r とする．(i) により， 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和，即ち力学的エネルギーは一定であり，初期値に等しい．初期状態として，地表 $(r = R)$ で速さ v_2 が与えられた状態をとれば

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{R}. \tag{1}$$

地球の重力圏から脱出できるということは，$r = \infty$ において $v^2 \geq 0$ となること．これは右辺が 0 以上となる場合である．よって第二宇宙速度は

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v_1 \simeq 11\mathrm{Km/s}.$$

補足

(1) の左辺

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

は，無限遠 $(r = \infty)$ で静止している $(v = 0)$ 物体について $E = 0$ となるように規格化された力学的エネルギー (保存量) である．物体の軌道は，地球の中心を焦点とした三つのタイプの曲線に分類されるが，それらは以下のように E の範囲と対応する[1].

$E < 0$: 束縛状態 (楕円), $\quad E = 0$: 非束縛 (放物線), $\quad E > 0$: 非束縛 (双曲線).

$E > 0$ の場合，軌道は遠方で直線に漸近する．このような状況は束縛状態と対比として散乱状態とも呼ばれる．

v_1 では円軌道であり，地球の重力に束縛されていて $E < 0$ である．v_2 では $E = 0$ となる．なお，太陽系からの脱出に関して「第三宇宙速度」という量も定義される．興味のある人は調べてみよう．

注意：ここでの計算は，発射後は万有引力だけに身をまかせる運動 (慣性飛行という) に適用される．実際のロケットでは，発射後も，噴射による推進力を用いており，これによりロケット自体の質量も減少していくことに注意しよう．惑星探査機は，一旦惑星へ接近する軌道に乗せた後は慣性飛行させ，時折ジェット噴射により軌道修正している．

[1] これは離心率による軌道の分類との対応する．詳しくは**「補遺：ケプラーの法則，軌道の導出」**のページ参照のこと．