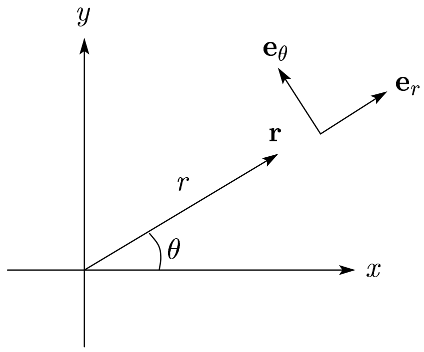
補遺： ケプラーの法則，軌道の導出



図のように，太陽 (質量 M) が原点にあるとし，惑星 (質量 m) の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とする．

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

である．r, θ は惑星の極座標であり，時間の関数．$M \gg m$ なので，近似的に太陽は原点に静止しているものとして扱ってよい[1]．以下の式の導出は容易 (何度かやった計算)．

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta. \tag{2}$$

惑星の運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

左辺に (2) を代入して $\mathbf{e}_r$ 方向と $\mathbf{e}_\theta$ 方向それぞれについての等式に分けると

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}, \tag{3}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0. \tag{4}$$

(4) に r をかけると

$$0 = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

となるので

$$\ell = r^2\dot{\theta} \tag{5}$$

とおくと，l は時間に依らないことが分る．実際

$$\ell = \frac{\text{原点についての角運動量の } z \text{ 成分}}{m} = 2(\text{面積速度})$$

であり，これらは万有引力という中心力のもとでは保存するのであった．以下 ℓ は与えられた定数として扱う．以上で運動方程式 (3), (4) のうち，後者の情報は完全に取り入れられた．残る (3) を $\dot{\theta}$ を消去して書くと

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{6}$$

[1] より正確に扱うことも出来るがここでは略．太陽を一つの焦点とする楕円軌道という結論は変わらない．

これは r を時間 t の関数 $r = r(t)$ とみたときの微分方程式．時間依存性を度外視して軌道だけを問題にするのなら，$\theta = \theta(t)$ と併せて t を消去して $r = r(\theta)$ についての微分方程式を導けばよい．具体的には以下のようにする．

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} \overset{(5)}{=} \frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\ell\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{これを } X \text{ と呼ぶ}), \tag{7}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dX}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dX}{d\theta} \overset{(5)}{=} \frac{\ell}{r^2}\frac{dX}{d\theta} \overset{(7)}{=} -\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{8}$$

(8) を (6) に代入すると

$$-\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}.$$

$-r^2/\ell^2$ をかけて整理すると

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{\ell^2}.$$

$\frac{GM}{\ell^2}$ は定数であることに注意するとこれは以下と同値．

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{\ell^2}\right) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{\ell^2}\right).$$

これは形式的に θ を「時間」とする単振動の式となっている．よって一般解は A, θ_0 を定数として

$$\frac{1}{r} - \frac{GM}{\ell^2} = A\cos(\theta - \theta_0). \tag{9}$$

以下，θ の原点は随意に取ってよいので $\theta_0 = 0$ として一般性を失わない．あらためてパラメーターを

$$\lambda = \frac{\ell^2}{GM}, \qquad \varepsilon = \frac{\ell^2 A}{GM} \tag{10}$$

とおく．λ は正で，長さの次元を持つことと，ε は無次元であることに注意．解 (9) は

$$r = r(\theta) = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{11}$$

これが軌道の極座標表示である．直交座標表示に戻すには (1) に代入した式

$$x = \frac{\lambda\cos\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}, \qquad y = \frac{\lambda\sin\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

において θ を消去すればよい．ε を離心率とよぶ．θ を π ずらしたものをあらためて θ としてもよいので $\varepsilon \geq 0$ として一般性を失わない．軌道は

$$\varepsilon > 1 : \text{双曲線}, \qquad \varepsilon = 1 : \text{放物線}, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1 : \text{楕円 (特に } \varepsilon = 0 \text{ では円)} \tag{12}$$

となる．惑星の軌道は $0 \leq \varepsilon < 1$ に対応する．太陽 (原点) が楕円の焦点になることも確認できる．

「万有引力」のページでは，力学的エネルギー

$$E = \frac{m}{2}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 - \frac{GMm}{r}$$

が保存することを注意した．今の場合，これは次のように表される．

$$E \overset{(2)}{=} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \overset{(5)}{=} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2}) - \frac{GMm}{r}. \tag{13}$$

実際，最後の式を t で微分すると，(6) により 0 となることが容易に確認できる．

「万有引力」のページでは，脱出速度の考察から，軌道は

$$E > 0 : \text{双曲線}, \qquad E = 0 : \text{放物線}, \qquad E < 0 : \text{楕円} \tag{14}$$

であると結論した．離心率による分類 (12) とエネルギーによる分類 (14) は，以下に示すように完全に対応する．まず (13) の各項を以下の様に表す．

$$\begin{aligned}
\dot{r} &\overset{(11)}{=} \frac{\lambda\varepsilon\dot{\theta}\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \overset{(11)}{=} \frac{r^2\varepsilon\dot{\theta}\sin\theta}{\lambda} \overset{(5)}{=} \frac{\ell\varepsilon\sin\theta}{\lambda}. \quad \therefore\ \dot{r}^2 \overset{(10)}{=} \frac{GM}{\lambda}(\varepsilon\sin\theta)^2. \\
\frac{\ell^2}{r^2} &\overset{(11)}{=} \frac{\ell^2}{\lambda^2}(1+\varepsilon\cos\theta)^2 \overset{(10)}{=} \frac{GM}{\lambda}(1+\varepsilon\cos\theta)^2. \\
\frac{GM}{r} &\overset{(11)}{=} \frac{GM}{\lambda}(1+\varepsilon\cos\theta).
\end{aligned}$$

これらを (13) に代入すると

$$\begin{aligned}
E &= \frac{GMm}{2\lambda}\left((\varepsilon\sin\theta)^2 + (1+\varepsilon\cos\theta)^2 - 2(1+\varepsilon\cos\theta)\right) \\
&= -\frac{GMm}{2\lambda}(1-\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{15}$$

関係式 (15) により 分類 (12) と (14) が対応することがわかる．なお，円軌道の場合 ($\varepsilon = 0$)，軌道半径は λ なので,

$$(\text{運動エネルギー}) : (\text{ポテンシャルエネルギー}) : (\text{全エネルギー}) = 1 : (-2) : (-1)$$

となっている．