

補遺：2次元、3次元における保存力

偏微分：微分する変数以外は定数と思って通常の微分を実行する。例えば

$$F = F(x, y, z) = e^x \sin y + xz^2, \\ \frac{\partial F}{\partial x} = e^x \sin y + z^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2xz.$$

偏微分の順序は可換。(このことは以下では使わないが。)上の例では

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = 2z.$$

1,2,3次元それぞれの場合に次の性質が基本的。

$$U(x + \delta x) = U(x) + \delta x \frac{dU}{dx} + O(\delta^2), \quad (1)$$

$$U(x + \delta x, y + \delta y) = U(x, y) + \delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \delta y \frac{\partial U}{\partial y} + O(\delta^2), \quad (2)$$

$$U(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = U(x, y, z) + \delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \delta y \frac{\partial U}{\partial y} + \delta z \frac{\partial U}{\partial z} + O(\delta^2), \quad (3)$$

ここで  $\delta x, \delta y, \delta z$  は微小とし、 $O(\delta^2)$  は  $\delta$  のついた量の2次以上の微小量による補正をあらわす。これらは偏微分の定義と同値な関係式である。(数学の教科書参照) 習慣的に

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2次元のとき), \quad \nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (3次元のとき)$$

と書いて、 $U$  の勾配 (gradient) と呼ぶ。1次元の場合は授業でやったので、以下2,3次元の場合を考える。(2), (3) を用いると、次の性質が証明できる。

$$\frac{dU(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{dU(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

証明は、1変数  $t$  の関数の微分の定義に立ち返り、(1) から  $x(t + \delta t) = x(t) + \delta t \frac{dx}{dt} + O(\delta^2)$  となっている事、 $y, z$  についても同様であることも用いる。試みよ。上の結果はベクトルのスカラー積  $(\cdot)$  を用いれば統一的に

$$\frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} = \left( \nabla U, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (4)$$

と書けることに注意しよう。

定理：空間の点  $\mathbf{r}$  において質量  $m$  の質点の受ける力  $\mathbf{F}$  が、あるスカラー  $U(\mathbf{r})$  を用いて  $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$  と表されるとき、物理量

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{r}(t)) \quad (5)$$

は保存する。

証明：(4) を用いれば  $E$  の時間微分を次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} \\ &= \left( m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) + \left( \nabla U, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= \left( m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \nabla U, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで質点の運動方程式は力  $\mathbf{F}$  が  $-\nabla U(\mathbf{r})$  で与えられるので、

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U \quad (7)$$

となっていることに注意すると、(6) は 0 であることが判る。(証明終)

定理の仮定に述べられた状況、即ち、空間の点  $\mathbf{r}$  において質量  $m$  の質点の受ける力  $\mathbf{F}$  が、あるスカラー  $U(\mathbf{r})$  を用いて  $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$  と表されるとき、 $\mathbf{F}$  を  $U$  をポテンシャルとする保存力という。この時  $\frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2$  を運動エネルギー、 $U(\mathbf{r})$  をポテンシャルエネルギー、と呼び、その和  $E$  のことを力学的エネルギーという。一般には保存するのは最後の力学的エネルギーだけで、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは和が一定になる範囲で刻々と変化する。

1.  $\nabla U = \nabla(U + \text{定数})$  であるので、保存力が与えられたときに、そのポテンシャルに定数を付け足す不定性がある。勿論この不定性は運動方程式には影響せず、単にエネルギーを凶る原点をずらす自由度に対応する。エネルギーは古典力学ではその変化(差)のみが問題となるので、その絶対的な値を一斉にずらして定義しても物理に何の変化も及ぼさない。
2. 万有引力  $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$  はポテンシャル  $U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|}$  をもつ保存力であることをチェックしてみよ。
3. 一般に保存力  $-\nabla U$  は、 $U$  が一定の面に垂直で、 $U$  の値が小さくなる向きを向いている。上の万有引力についてそれを確認することは易しい。
4. 与えられた力  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  が保存力であるための条件、即ち、 $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$  となるスカラー  $U$  が存在するための条件を考えてみよ。 ヒント：偏微分は可換。