ビオ・サバールの法則

1. 半径 a の円周を定常電流 I が流れている．中心軸上での磁束密度を求めよ．

2. 単位長さあたり n 巻きの無限に長いコイル (ソレノイド) に電流 I が流れている．コイルの中心軸上における磁束密度を求めよ．

3. ある面に対して電流分布が面対称ならば，その面の任意の点において磁場は面と直交することを示せ．

解答例

1. 円周の中心を座標原点にとり，円周を xy 平面上にとる．中心軸は z 軸になる．電流の向きは z 軸の正の方向に右ねじを進めるように流れているとする．

対称性から，磁束密度は中心軸上では z 成分以外は 0 となる．円周上の点を $\mathbf{l} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ 中心軸上の点を $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ とすると

$$d\mathbf{l} = (-a\sin\theta d\theta, a\cos\theta d\theta, 0), \qquad \mathbf{r} - \mathbf{l} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z),$$
$$(d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})) \text{ の } z \text{ 成分} = (d\mathbf{l})_x(\mathbf{r} - \mathbf{l})_y - (d\mathbf{l})_y(\mathbf{r} - \mathbf{l})_x = a^2 d\theta.$$

よって $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(z))$ とすると，ビオ・サバールの法則の z 成分は

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{(d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l}))_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

とくに円電流の中心では $z = 0$ とおいて $B_z(0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$ である．

2. 対称性から中心軸上の磁束密度はコイルの軸に沿った成分のみが 0 でない．また，その大きさはコイルの中心軸上のどこでも同じである．コイルが $x^2 + y^2 = a^2$, $-\infty < z < \infty$ にあるものとし，前問の円電流が無限に集まった状況と考えればよい．コイルのうち，z 座標が $z \sim z + dz$ の間にある (無限小）電流は $nIdz$ であるから，(1) により原点に

$$dB_z = \frac{\mu_0 a^2 nIdz}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

の大きさの (無限小) 磁束密度 dB_z をつくる．従ってコイル全体では

$$B_z = \int dB_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a^2 nIdz}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 nI.$$

最後の積分は初等的，たとえば $z = a\tan\phi$ とすればよい．

中心軸からずれた位置における磁束密度をビオ・サバールの法則の積分を実行して求める計算は複雑になる．無限に長いコイルの場合は対称性がよいのでアンペールの法則が有効であり，それによると実は中心から外れていてもコイルの内部は全て一様に $\mu_0 nI$ の磁束密度を持つことが容易に導かれる．

3. この面を xy 平面とし，その上の点 $(X, Y, 0)$ における磁束密度 $\mathbf{B}$ の x 成分 B_x，y 成分 B_y がともに 0 になることを示せばよい．位置 (x, y, z) における電流密度は，仮定より

$$i_x(x, y, z) = i_x(x, y, -z), \;\; i_y(x, y, z) = i_y(x, y, -z), \;\; i_z(x, y, z) = -i_z(x, y, -z)$$

を満たす．ビオ・サバールの法則から

$$\begin{aligned} B_x(X,Y,0) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{i_y(x,y,z)(0-z)-i_z(x,y,z)(Y-y)}{\left((X-x)^2+(Y-y)^2+(0-z)^2\right)^{3/2}}dxdydz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{-i_y(x,y,z)z-i_z(x,y,z)(Y-y)}{\left((X-x)^2+(Y-y)^2+z^2\right)^{3/2}}dxdydz \end{aligned}$$

ここで，被積分関数は z の奇関数である．従って z について $-\infty < z < \infty$ で積分すると，これは 0 になる．$B_y = 0$ も同様に示される．

例えば問 2 では磁場はソレノイドに平行な向きを持つことが直ちにわかる．このような対称性に関する磁場の性質はアンペールの法則と組み合わせると，とても有用である．