

周期箱玉系と超離散リーマンテータ関数

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

東大理 坂本玲峰 (Reiho Sakamoto)

Graduate School of Sciences, University of Tokyo

はじめに

周期箱玉系について、ベータ仮説による逆散乱法 [KTT] と初期値問題の解の rational characteristics 超離散リーマンテータ関数による明示式 [KS, KS2] について報告する。

箱玉系は、量子群 U_q に付随する可解格子模型の結晶化 ($q \rightarrow 0$) [HKT, HHIKTT, FOY] とソリトン方程式の超離散化 [TTMS] という二つの側面を持つ。可解格子模型 [B] の解法としてはベータ仮説 [Be] が代表的であり、箱玉系はそれがソリトン方程式に対してどのように機能するかを研究する題材を提供する。実際、Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) 理論 [KR] はベータ仮説の組合せ論的なバージョンであるが、誕生から 20 年近くを経て、箱玉系の解析にその真価を発揮したともいえる [KOTY]。KKR 理論は $q = 1$ の状況に相当する。もう一つの系統的な結果は $q = 0$ の場合であり、ベータ方程式の線形化としてストリング中心方程式が得られ、その解の数え上げからウエイト多重度公式が従うことが知られている [KN]。これら $q = 0$ と $q = 1$ の「組合せベータ仮説」を更に組合せることにより周期箱玉系 [YYT] の逆散乱法が定式化される [KTT]。

KKR 理論ではベータ根の様子をモード化した rigged configuration と呼ばれる組合せ論的对象物が登場する。この rigged configuration を、ストリング中心方程式の解の同値関係により同一視したものが周期箱玉系の作用・角変数になる。作用変数はソリトンの振幅のリストであり、保存する。一方角変数はソリトンの位相であり、線形に時間発展する。KKR 全単射は周期系に適合するよう整形することができ、順・逆散乱写像を与える。角変数の集合はヤコビ多様体の超離散類似 (14) をなし、周期箱玉系の非線形動力学はその上の直線運動に変換され変数分離される (定理 1)。

以上の結果は、周期箱玉系の初期値問題の解法アルゴリズムを提供する。陽な例は既に [KTT] の Example 3.13, 3.14 や [KS] の Example 2.3 などにあるので参照されたい。与えられた作用・角変数に対応する状態は超離散リーマンテータ関数により明示される (定理 2 (25), (31), (35))。これは初期値問題の解の明示式を与え、ソリトン方程式の準周期解 [DT] の超離散類似を実現する。導出は二つの結果に基づく。第一は、KKR 全単射の区分線形公式である [KSY]。これにより無限系の場合は rigged configuration から箱玉系の状態を再構成する操作が KP の超離散タウ関数により記述される。第二は周期箱玉系の状態 p が実効的に $p \otimes p \otimes p \otimes \dots$ という無限系とみなせることである [KTT]。このような無限系の超離散タウ関数は、ある 2 次形式の値の無限集合の最小値となり、自然に超離散リーマンテータ

関数が現れる．その際ストリング中心方程式の係数行列が周期行列の役割を果たす．詳しい導出は文献 [KS] の section 3 を参照されたい．

ソリトン方程式の超離散化を top-down とするなら，本稿のアプローチは組合せベータ仮説による bottom-up である．初期値問題の解法として，単にアルゴリズムだけでなく，rigged configuration，KKR 全単射，ストリング中心方程式など組合せベータ仮説の手法を準周期解の理論の超離散化に結びつけ，周期箱玉系の作用・角変数，超離散ヤコビ多様体，超離散リーマンテータ関数といった概念を提起する．また，技術的に KKR 全単射はより一般の代数，表現 (クリスタル) への系統的な拡張が知られた標準的手法であり，超離散化の際に不可欠な正定値性を保証する困難に苛まれないという利点がある．

KKR 理論のオリジナルな文献 [KR] では rigged configuration と Robinson-Schensted 対応における Q タブロー (Littlewood-Richardson タブロー) との全単射が扱われている．本稿での KKR 全単射とは rigged configuration と highest state との 1:1 対応のことを指す．その具体的なアルゴリズムは例えば [KOTY]，[KTT] の Appendix A，[KSY] の Appendix C 等に記述されている．これらと convention は異なるが A 型の最も一般の場合のレビューが [S] にある．周期箱玉系の非例外型アフィン・リー環への拡張，A 型一般での状態数の数え上げ公式，力学的周期と $q = 0$ ベータ固有値に関する予想等については [KT] を参照されたい．

状態と時間発展

$U_q(A_1^{(1)})$ のスピン $l/2$ 表現のクリスタルを $B_l = \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid x_1 + x_2 = l\}$ とする [Ka, KMN]．元 (x_1, x_2) は文字 i を x_i 個含む準標準盤としても表示する (ただし枠は略する)．例えば $(1, 3) \in B_4$ は 1222 と書く．特に B_1 の元 $(1, 0), (0, 1)$ は 1, 2 と表記される．1 は空箱，2 は玉が一つ入った箱と解釈する． $L \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する． $B_1^{\otimes L}$ の元をシステムサイズ L の周期箱玉系の状態という．状態 $p = b_1 \otimes \cdots \otimes b_L$ で，古典ウエイトが非負の元，即ち $\#\{i \mid b_i = 1\} \geq \#\{i \mid b_i = 2\}$ を満たすものからなる部分集合を \mathcal{P} とする．以下では状態の集合を \mathcal{P} へ制限する．1 と 2 の総入れ替えに関する対称性があるのでこれにより一般性は失われぬ． $p \in \mathcal{P}$ に対し，その時間発展 $T_l(p) \in \mathcal{P}$ を以下のように定義する．

$$(l, 0) \otimes p \simeq p^* \otimes v_l, \quad v_l \otimes p \simeq T_l(p) \otimes v_l. \quad (1)$$

ここで \simeq はクリスタルの同型で，組み合わせ R [KMN, NY] $B_l \otimes B_1 \rightarrow B_1 \otimes B_l$

$$(x_1, x_2) \otimes 1 \mapsto \begin{cases} 1 \otimes (l, 0) & \text{if } (x_1, x_2) = (l, 0) \\ 2 \otimes (x_1 + 1, x_2 - 1) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \otimes 2 \mapsto \begin{cases} 2 \otimes (0, l) & \text{if } (x_1, x_2) = (0, l) \\ 1 \otimes (x_1 - 1, x_2 + 1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

を L 回適用して得られる．(1) の第一式により p に依存して $v_l \in B_l$ が定まり，第二式にそれを用いて $T_l(p)$ が定まる ($p^* \in \mathcal{P}$ は以下では登場せず， v_l が第二式の右辺にも現れることは非自明な性質)．

関係式 $R(u \otimes b) = b' \otimes u'$ を頂点 (+ 記号) の周りに u, b, u', b' を左から時計回りに配置した図で表示しよう．例えば下図の左端の頂点は $R(12 \otimes 1) = 2 \otimes 11$ を表す．時間発展の

計算例として $p = 1121221 \in B_1^{\otimes 7}$ (記号 \otimes 略) をとる. 定義 (1) から $v_2 = (1, 1) = 12 \in B_2$ となり, $T_2(p)$ は図

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\ 12+ & 11+ & 11+ & 12+ & 11+ & 12+ & 22+ & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

から $T_2(1121221) = 2112112$ と求められる.

R は $B_1 \otimes B_1$ 上で恒等写像なので T_1 は巡回的シフト $T_1(b_1 \otimes \cdots \otimes b_L) = b_L \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{L-1}$ となる. 組み合わせ R の満たす Yang-Baxter 方程式 $(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$ から可換性 $T_l T_k = T_k T_l$ が従う. 各 T_l にはある保存量 E_l が付随し, $E_l(T_k(p)) = E_l(p)$ が成立する. また拡張アフィンワイル群の任意の元 $w \in \widehat{W}(A_1^{(1)})$ について $w T_l(p) = T_l(w(p))$, $E_l(w(p)) = E_l(p)$ が成立する ([KTT] Theorem 2.2, Proposition 2.3). 周期箱玉系のオリジナルな定式化 [YYT] で扱われているのは T_∞ であり, 玉の移動規則による記述がある. 上記のようなクリスタルを用いた定式化ではこの玉の移動は拡張アフィンワイル群の作用と同定される ([KTT] Proposition 2.5).

$q = 1$ と $q = 0$ における組み合わせペーテ仮説

\mathcal{P} のうち, sl_2 について highest な元からなる部分集合を \mathcal{P}_+ とする. 即ち, $\mathcal{P}_+ = \{p \in \mathcal{P} \mid \tilde{e}_1 p = 0\}$ であり, これは $p = b_1 \otimes \cdots \otimes b_L$ と表示した際に, $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k$ が任意の k について非負ウエイトを持つものの集合である. 組み合わせペーテ仮説 ($q = 1$) [KR] によれば, \mathcal{P}_+ と rigged configuration の集合には Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) 全単射 ϕ により 1 対 1 対応がある. これを $\phi(p_+) = (\mu, J)$ と書く. 式 (30) の後に例があるので参照されたい. 右辺が rigged configuration である. μ は升目の総数が $L/2$ 以下の任意のヤング図であり, configuration と呼ばれる. 以下では, ヤング図 μ の相異なる行の長さの集合を $\mathbb{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_g\}$ とし, 長さ $i \in \mathbb{I}$ の行の数を $m_i (\geq 1)$ とする. ヤング図を分割と同一視し, Macdonald の本のように大きい順にその行の長さを記す表示では

$$\mu = (i_g^{m_{i_g}} \cdots i_1^{m_{i_1}}) \quad (2)$$

となる. つまり configuration μ は \mathbb{I} と m_{i_1}, \dots, m_{i_g} というデータと等価である.

ヤング図 μ の各行には非負整数が割り当てられており, rigging と呼ばれる. これをあらわしているのが (μ, J) という記号の J の部分である. 具体的に, ヤング図 μ には長さ i の行が m_i 個あるが, これらに割り当てられた rigging を下から順に $J_{i,1}, \dots, J_{i,m_i}$ としよう. このとき, $0 \leq J_{i,1} \leq \cdots \leq J_{i,m_i} \leq p_i$ が各 $i \in \mathbb{I}$ について満たされているときに rigged configuration と呼ぶ. ここで p_i は

$$p_i = L - 2 \sum_{j \in \mathbb{I}} \min(i, j) m_j \quad (3)$$

で定義される整数であり, μ が configuration ならば, つまり升目の総数 $\sum_{i \in \mathbb{I}} i m_i$ が $L/2$ 以下ならば, 非負である. KKR 全単射を $\phi(p_+) = (\mu, J)$ と書く際, J とは上の条件を満たす rigging $(J_{i,\alpha})_{i \in \mathbb{I}, 1 \leq \alpha \leq m_i}$ を象徴してあらわすものと了解する. ここで添え字の対 (i, α) はヤング図 μ の各行をラベルし, 今後頻出するので以下その集合を

$$\tilde{\mathbb{I}} = \{(i, \alpha) \mid i \in \mathbb{I}, 1 \leq \alpha \leq m_i\}, \quad \gamma = |\tilde{\mathbb{I}}| = m_{i_1} + \cdots + m_{i_g}. \quad (4)$$

と書く．成分が $\tilde{\mathbb{I}}$ でラベルされる γ 次元のベクトルと行列として以下のものを導入する．

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = (\min(i, j))_{(i, \alpha) \in \tilde{\mathbb{I}}} \in \mathbb{Z}^\gamma \quad (j \in \mathbb{I}), \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = (J_{i, \alpha} + \alpha - 1)_{(i, \alpha) \in \tilde{\mathbb{I}}} \in \mathbb{Z}^\gamma, \quad (6)$$

$$A = (A_{i\alpha, j\beta})_{(i, \alpha), (j, \beta) \in \tilde{\mathbb{I}}}, \quad A_{i\alpha, j\beta} = \delta_{i, j} \delta_{\alpha, \beta} (p_i + m_i) + 2 \min(i, j) - \delta_{i, j}. \quad (7)$$

式 (6) には $+\alpha - 1$ というシフトが入っていることに注意されたい．先に導入された $\mathbb{I} = \{i_1, \dots, i_g\}$ は、ヤング図 μ の相異なる行の長さの集合であり、上の添え字集合 $\tilde{\mathbb{I}}$ を「束ねた」ものである．これに相当して、 \mathbb{I} を添え字集合に持つ g 次元ベクトル，行列として以下のものを導入する．

$$\mathbf{h}_j = (\min(i, j))_{i \in \mathbb{I}} \in \mathbb{Z}^g, \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \mathbb{I}} = L\mathbf{h}_1 - 2 \sum_{j \in \mathbb{I}} m_j \mathbf{h}_j \in \mathbb{Z}^g, \quad (9)$$

$$\mathbf{J} = (J_{i, 1} + \dots + J_{i, m_i})_{i \in \mathbb{I}} \in \mathbb{Z}^g, \quad (10)$$

$$F = (F_{i, j})_{i, j \in \mathbb{I}}, \quad F_{i, j} = \sum_{\beta=1}^{m_j} A_{i\alpha, j\beta} = \delta_{ij} p_i + 2 \min(i, j) m_j, \quad (11)$$

$$M = \text{diag}(m_i)_{i \in \mathbb{I}}, \quad (12)$$

行列 A, F は $q = 0$ におけるベータ方程式の解析 [KN] において導入された．特に A は線形化されたベータ方程式（ストリング中心方程式）の係数行列であり、正定値であることが知られている．

作用・角変数と逆散乱法

任意の状態 $p \in \mathcal{P}$ は適当に巡回的シフトを施せば highest 状態にすることができる．即ちある整数 d と highest 状態 $p_+ \in \mathcal{P}_+$ を用いて $p = T_1^d(p_+)$ と表示される． d と p_+ のとり方は一意的でないが、 $\phi(p_+)$ の configuration は一意的であることが示される ([KTT] Lemma C.3)．従って状態の集合は p_+ の configuration μ により $\mathcal{P} = \sqcup_\mu \mathcal{P}(\mu)$ と分解される． μ を作用変数と呼ぶ．実は μ は E_l から構成され、保存量であることが知られている．具体的には ([KTT] Proposition 3.4)

$$E_l(p) = \sum_{j \in \mathbb{I}} \min(l, j) m_j \quad (13)$$

が成立する．つまり $\{E_l\}$ を知れば $\mathbb{I} = \{i_1, \dots, i_g\}$ と m_{i_1}, \dots, m_{i_g} が決まり、ヤング図 μ は (2) により再構成される．周期箱玉系において、 \mathbb{I} はソリトンの振幅のリストであり、 m_i は振幅 i のソリトンの個数である． μ は保存量なので各等位集合 $\mathcal{P}(\mu)$ は時間発展で不変に保たれる．

作用変数 μ を指定したとき、角変数の集合（ヤコビ多様体の超離散類似）を

$$\mathcal{J}(\mu) = (\mathcal{I}_{m_{i_1}} \times \dots \times \mathcal{I}_{m_{i_g}}) / \Gamma, \quad \Gamma = AZ^\gamma, \quad (14)$$

と定める．ここで $\mathcal{I}_n = (\mathbb{Z}^n - \Delta_n) / \mathcal{S}_n$ は n 次元格子から集合 $\Delta_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n \mid z_\alpha = z_\beta \text{ for some } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n\}$ を除外したものを対称群 \mathcal{S}_n の作用でわった集合である．

つまり、相異なる n 個の整数の組（並べる順序による識別をしない）の集合のこと。行列 A (7) は (14) の積と対応するブロック構造をしており、(14) の $\text{mod } \Gamma$ は意味を持つ。以下 $\mathcal{I}_{m_{i_1}} \times \cdots \times \mathcal{I}_{m_{i_g}}$ の元とその $\mathcal{J}(\mu)$ への像を同じ記号で表す。 $\mathcal{J}(\mu)$ は有限集合であり、

$$|\mathcal{J}(\mu)| = (\det F) \prod_{i \in \mathbb{I}} \frac{1}{m_i} \binom{p_i + m_i - 1}{m_i - 1} = \frac{L}{p_{i_g}} \prod_{i \in \mathbb{I}} \binom{p_i + m_i - 1}{m_i} \quad (15)$$

であることが知られている ([KN, KTT])。 μ が configuration であれば (15) は正整数である。(空箱と玉の数が一致する場合は $p_{i_g} = 0$ となるが、その場合は第二の表式の因子 $\frac{L}{p_{i_g}} \binom{p_{i_g} + m_{i_g} - 1}{m_{i_g}}$ を $\frac{L}{m_{i_g}}$ と解釈する。) (30) の下で扱われている例 $\mathbb{I} = \{1, 4, 9\}$, $(m_1, m_4, m_9) = (1, 2, 1)$, $L = 45$ では $|\mathcal{J}(\mu)| = 3515$ である。ソリトン状態の完全性を表す等式

$$\sum_{\mu} |\mathcal{J}(\mu)| = \binom{L}{M} \quad (0 \leq M \leq L/2)$$

も知られている ([KN], Theorems 3.5 and 4.9)。ここで和は $\sum_{i \geq 1} im_i = M$ を満たす任意の非負整数 m_1, m_2, \dots にわたる。

状態 $p \in \mathcal{P}(\mu)$ に対応する角変数を指定しよう。上記のように p を highest 状態 p_+ と巡回的シフト T_1 を用いて $p = T_1^d(p_+)$ と表示し、KKR 全単射を施して $\phi(p_+) = (\mu, J)$ となったとする。configuration μ からは (2) により $\mathbb{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_g\}$ と m_{i_1}, \dots, m_{i_g} が定められる。さらに $J = (J_{i,\alpha})_{(i,\alpha) \in \mathbb{I}}$ に定義 (5), (6), (7) を適用して

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{P}(\mu) &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathcal{P}_+ \longrightarrow \mathcal{J}(\mu) \\ p &\longmapsto (d, p_+) \longmapsto (\tilde{\mathbf{J}} + d\tilde{\mathbf{h}}_1)/\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

で指定されるのが角変数である。(6) におけるシフト $+\alpha - 1$ と rigging の条件 $0 \leq J_{i,1} \leq \cdots \leq J_{i,m_i} \leq p_i$ に注意すると、 $\tilde{\mathbf{J}} + d\tilde{\mathbf{h}}_1$ の成分は $i \in \mathbb{I}$ でラベルされる各ブロック内で全て相異なることがわかる。従って (16) において $\tilde{\mathbf{J}} + d\tilde{\mathbf{h}}_1$ は $\mathcal{J}(\mu)$ の代表元を定める。さらに d, p_+ のとり方の任意性が $\text{mod } \Gamma$ により相殺され、 Φ は well-defined であることが示される ([KTT] Proposition 3.7)。

定理 1 ([KTT] Theorem 3.12). Φ は全単射であり、次の可換図が成立。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mu) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{J}(\mu) \\ T_1 \downarrow & & \downarrow T_1 \\ \mathcal{P}(\mu) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{J}(\mu) \end{array}$$

ただし $\mathcal{J}(\mu)$ 上の時間発展は $T_l(\tilde{\mathbf{J}}) = \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{h}}_l$ により定義される。

合成 $\Phi^{-1} \circ T_l^t \circ \Phi$ が初期値問題の逆散乱法による解である。計算のステップ数は t によらない。 $\Phi^{\pm 1}$ は順・逆散乱写像であり、それにより周期箱玉系の時間発展 T_l は集合 $\mathcal{J}(\mu)$ 上の速度 $\tilde{\mathbf{h}}_l$ の直線運動に変換される。この意味で $\mathcal{J}(\mu)$ はソリトン方程式の準周期解にお

けるヤコビ多様体の超離散類似である．任意の時間発展 $T = \prod_l T_l^{c_l}$ のもとでの generic な周期 \mathcal{N} は，

$$\mathcal{N} \left(\sum_l c_l \tilde{\mathbf{h}}_l \right) \in \Gamma \quad (17)$$

をみたす最小の正整数として定式化される．クラメールの公式を用いると \mathcal{N} は A のある小行列式の比の最小公倍数となることが導かれる ([KTT] Theorem 4.6) . 特に $c_l = \delta_{l,\infty}$ の場合は [YYT] の結果に帰着する．一般の l について $T_l^{\mathcal{N}^*}(p) = p$ を満たす最小の正整数，即ち T_l に関する p の基本周期の閉じた公式は [KTT] の (4.26) に得られており，例えば $p = 12112211122211121112211111$ の時間発展 T_3 に対して $\mathcal{N}^* = 130$ を与える ([KTT] Example 4.10) . これは generic な周期公式では 260 となってしまう状態である．

角変数 $\tilde{\mathbf{J}}$ (6) に対する時間発展 (定理 1) は，それを束ねた変数 \mathbf{J} (10) に対する時間発展

$$T_l(\mathbf{J}) = \mathbf{J} + M\mathbf{h}_l \quad (18)$$

を引き起こす．ここで M は (12) で定義される．

超離散リーマンテータ関数とタウ関数

作用変数 μ (2) を固定する． μ に付随して、rational characteristic $\mathbf{a} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^g$ の超離散リーマンテータ関数を以下のように定義する．

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) = - \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \{ {}^t(\mathbf{n} + \mathbf{a})\Omega(\mathbf{n} + \mathbf{a})/2 + {}^t(\mathbf{n} + \mathbf{a})\mathbf{z} \} \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^g), \quad (19)$$

$$\Omega = MF = (\Omega_{i,j})_{i,j \in \mathbb{I}}, \quad \Omega_{i,j} = \delta_{ij}p_i m_i + 2 \min(i, j)m_i m_j. \quad (20)$$

F, M の定義は (11), (12) を見よ． Ω は正定値対称行列である． $\mathbf{v} \in \Omega\mathbb{Z}^g$ に対して擬周期性 $\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{z} + \mathbf{v}) = \Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) + {}^t\mathbf{v}\Omega^{-1}(\mathbf{z} + \mathbf{v}/2)$ を持つ．

$$\Omega\mathbf{h}_1 = LM\mathbf{h}_1 \quad (21)$$

が成り立つ．

$\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ 以外にもう一つの補助関数 $\chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbf{I}})$ が必要である．これは $\tilde{\mathbf{I}} = (I_{i,\alpha} + \alpha - 1)_{(i,\alpha) \in \tilde{\mathbb{I}}} \in \mathcal{I}_{m_{i_1}} \times \cdots \times \mathcal{I}_{m_{i_g}}$ と $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathbb{Z}^g$ から定まる有理数値関数であり、

$$\chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbf{I}}) = \chi(\mathbf{s}'; \tilde{\mathbf{I}}) \text{ if } \mathbf{s} \equiv \mathbf{s}' \pmod{M\mathbb{Z}^g}, \quad (22)$$

$$\chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbf{I}}) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \frac{1}{m_i} \sum_{1 \leq \alpha \leq s_i < \beta \leq m_i} (I_{i,\beta} - I_{i,\alpha} - \frac{p_i}{2}) \quad (23)$$

$$\text{if } 0 \leq s_i < m_i, \quad I_{i,1} \leq \cdots \leq I_{i,m_i} \text{ for all } i \in \mathbb{I} \quad (24)$$

で定義される．ここで，(23) の第二の和は対 (α, β) にわたる．特に $\chi(0; \tilde{\mathbf{I}}) = 0$ である．

与えられた $\mathbf{I} \in \mathbb{Z}^g$ と $\tilde{\mathbf{I}} = (I_{i,\alpha} + \alpha - 1)_{(i,\alpha) \in \tilde{\mathbb{I}}} \in \mathcal{I}_{m_{i_1}} \times \cdots \times \mathcal{I}_{m_{i_g}}$ について，(8),(9),(12) を用いてタウ関数を以下のように定義する．

$$\tau_r(k) = \max_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^g / M\mathbb{Z}^g} \left\{ \Theta_{M^{-1}\mathbf{s}} \left(\mathbf{I} + M \left(r\mathbf{h}_{\infty} - k\mathbf{h}_1 - \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \right) + \chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbf{I}}) \right\} \quad (r, k \in \mathbb{Z}). \quad (25)$$

以上は $\tau_r(k)$ の定義であり, \mathbf{I} と $\tilde{\mathbf{I}}$ は任意のものでよい.

初期値問題の解の明示式

与えられた状態 $p \in \mathcal{P}(\mu)$ からタウ関数 (25) のパラメータを指定する. $M, \mathbf{p}, \mathbf{h}_j$ については既に述べたように (12), (9), (8) で定義される.

$\tilde{\mathbf{I}}$ は (16) に従って $p \in \mathcal{P}(\mu)$ の角変数にとり, それを束ねることにより \mathbf{I} を以下のように定める.

$$\Phi(p) = \tilde{\mathbf{I}} =: (I_{i,\alpha} + \alpha - 1)_{(i,\alpha) \in \tilde{\mathbf{I}}} \in \mathcal{J}(\mu), \quad (26)$$

$$\mathbf{I} := (I_{i,1} + \cdots + I_{i,m_i})_{i \in \mathbb{I}} \in \mathbb{Z}^g / F\mathbb{Z}^g. \quad (27)$$

これは (6) と (10) の関係と同じである. ただし, $\tilde{\mathbf{I}}$ は $\Gamma = AZ^\gamma$ による同一視があることを反映して \mathbf{I} には $F\mathbb{Z}^g$ による同一視がはいる. これは A と F の関係式 (11) から導かれる.

補題 1. $\tilde{\mathbf{I}} \equiv \tilde{\mathbf{I}}' \pmod{\Gamma}$ とし, それぞれに対応するタウ関数を $\tau_r(k), \tau_r'(k)$ とすると $\tau_r(k) - \tau_r'(k)$ は r と k の 1 次関数である.

この補題の証明は, Γ のある基底 ([KTT] の slide σ_k に相当) に対して (25) の \max の中の変化が, 1 次関数を modulo として characteristics $M^{-1}\mathbf{s}$ の変化 $s_k \mapsto s_k + 1$ に吸収できることによる.

なお, $\tau_r(k)$ は整数値関数であることも示される.

定理 2. 与えられた作用変数 μ , 角変数 $\tilde{\mathbf{I}}$ を持つ状態 $p = (1-x_1, x_1) \otimes \cdots \otimes (1-x_L, x_L) \in \mathcal{P}(\mu)$ は以下で与えられる. (x_k は左から k 番目の箱の中の玉の個数)

$$x_k = \tau_0(k) - \tau_0(k-1) - \tau_1(k) + \tau_1(k-1). \quad (28)$$

補題 1 により, 同一の角変数 $\tilde{\mathbf{I}} \equiv \tilde{\mathbf{I}}' \pmod{\Gamma}$ からは矛盾無く同じ x_k が定まる. 定理 2 の証明は [KS] の section 3 と同様である.

定理 1 と定理 2 から初期値問題の解の明示式が従う. 即ち, (28), (25) において角変数を

$$\tilde{\mathbf{I}} \mapsto \tilde{\mathbf{I}} + \sum_l c_l \tilde{\mathbf{h}}_l \quad (29)$$

と置き換えれば時間発展した状態 $(\prod_l T_l^{c_l})(p)$ が得られる. その際, $\chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbf{I}})$ は, (23) において差 $I_{i,\alpha} - I_{i,\beta}$ は不変に保たれるため, 変化しない. また, (25) の中の超離散リーマンテータ関数は, 束ねられた角変数 \mathbf{I} に依存しているが, この時間発展は (18) で与えられ, (29) に相当する変化は

$$\mathbf{I} \mapsto \mathbf{I} + M \left(\sum_l c_l \mathbf{h}_l \right) \quad (30)$$

である. 特に, $T_1^L(\mathbf{I}) = \mathbf{I} + LM\mathbf{h}_1$ であるが, (21) に注意すると $T_1^L(\mathbf{I}) = \mathbf{I} + \Omega\mathbf{h}_1$ となり, タウ関数は擬周期性によるシフトしか変化せず, (28) は不変である. これは巡回シフト T_1 をシステムサイズ L だけ施しても状態は不変であることと整合し, (28) は k について周期 L の周期関数になっている.

定義 (8) により, $l \geq \max \mathbb{I} = i_g$ 即ちソリトンの最大振幅以上の l については $\mathbf{h}_l = \mathbf{h}_\infty$ である. 従って時間発展 T_l の効果 (30) は $\mathbf{I} \mapsto \mathbf{I} + M\mathbf{h}_\infty$ となり, これは (25) で $r \rightarrow r+1$ とするのと等価になる. 即ちこのような時間発展に関しては r が時間変数となる.

系. 与えられた作用変数 μ , 角変数 $\tilde{\mathbf{I}}$ を持つ状態を p とする. このとき $l \geq \max \mathbb{I}$ ならば

$$\begin{aligned} & \text{状態 } T_l^t(p) \text{ の左から } k \text{ 番目の箱の中の玉の数} \\ & = \tau_t(k) - \tau_t(k-1) - \tau_{t+1}(k) + \tau_{t+1}(k-1). \end{aligned} \quad (31)$$

例として長さ $L = 45$ の状態 ($B_1^{\otimes 45}$ の元) の時間発展

$$\begin{aligned} p &= 11122222111122222221111111111111112222111211 \\ T_9(p) &= 11111111222211111111222222221111111111222122 \end{aligned} \quad (32)$$

を考えよう. p は highest 状態

$$p_+ = 111112222111211111222221111222222211111111$$

を用いて $p = T_1^{29}(p_+)$ と書ける. KKR 全単射で p_+ に対応する rigged configuration は

$$\begin{array}{cccccccc|c} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 6 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 2 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 10 \end{array}$$

である. 従って $\mathbb{I} = \{1, 4, 9\}$, $M = \text{diag}(m_1, m_4, m_9) = \text{diag}(1, 2, 1)$. また, (26) の $I_{i,\alpha}$ は, $(I_{1,1}, I_{4,1}, I_{4,2}, I_{9,1}) = (39, 31, 35, 29)$ となる. そのほか \mathbf{p} (9), \mathbf{I} (27), Ω (20) は

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_4 \\ p_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 39 \\ 66 \\ 29 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 39 & 4 & 2 \\ 4 & 70 & 16 \\ 2 & 16 & 27 \end{pmatrix}.$$

タウ関数 (25) の引数は

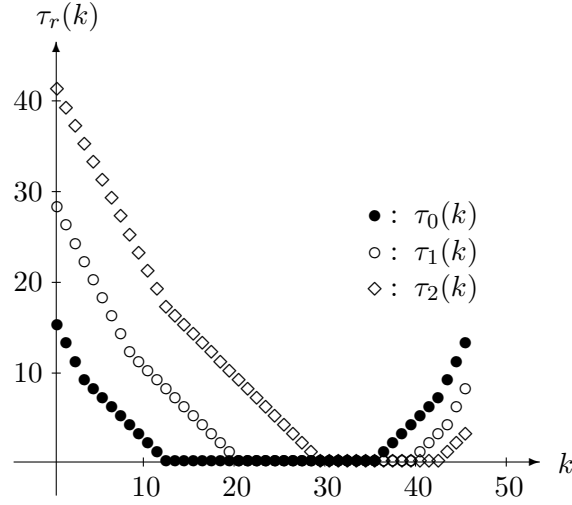
$$\mathbf{I} + M(r\mathbf{h}_\infty - k\mathbf{h}_1 - \frac{\mathbf{p}}{2}) = \begin{pmatrix} r - k + 41/2 \\ 8r - 2k + 47 \\ 9r - k + 49/2 \end{pmatrix} =: \mathbf{z}_{r,k}. \quad (33)$$

補助関数 $\chi(\mathbf{s}; \tilde{\mathbb{I}})$ (23) は $\mathbf{s} = (0, 1, 0)$ において非自明な値 $\frac{1}{m_4}(I_{4,2} - I_{4,1} - \frac{p_4}{2}) = -\frac{11}{4}$ を持つ. 以上から

$$\tau_r(k) = \max\{\Theta_{0,0,0}(\mathbf{z}_{r,k}), \Theta_{0,\frac{1}{2},0}(\mathbf{z}_{r,k}) - \frac{11}{4}\} \quad (34)$$

となる. これが整数値をとることも確認できる. $l \geq 9$ の場合は時間発展した状態 $T_l^t(p)$ は (31) により得られる.

タウ関数 (34) を $0 \leq r \leq 2, 0 \leq k \leq 45$ についてプロットすると次のようになる.



一番左が $(\tau_0(0), \tau_1(0), \tau_2(0)) = (15, 28, 41)$ であり，一番右では $(\tau_0(45), \tau_1(45), \tau_2(45)) = (13, 8, 3)$ という値を持つ．状態 $T_9^t(p)$ (32) においてソリトンの先頭と終わりの位置に相当する k のところで確かに $\tau_t(k)$ または $\tau_{t+1}(k)$ の傾きが変化していることが視察できる．

タウ関数 (25) は，同じ長さのソリトンが複数いない状況，即ち $\forall m_i = 1$ の場合は相当簡略化する [KS]．この場合， $\chi(s; \tilde{\mathbf{I}}) = 0$ であり， $\tilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}$ ， $\Omega = F = (\delta_{ij} p_i + 2 \min(i, j))_{i, j \in \mathbb{I}}$ となる．characteristics が 0 の超離散リーマンテータ関数を $\Theta(\mathbf{z}) = \Theta_0(\mathbf{z})$ と書くと (28) は

$$\begin{aligned}
 x_k = & \Theta\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}}{2} - k\mathbf{h}_1\right) - \Theta\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}}{2} - (k-1)\mathbf{h}_1\right) \\
 & - \Theta\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}}{2} - k\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty\right) + \Theta\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}}{2} - (k-1)\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty\right).
 \end{aligned} \tag{35}$$

と簡単になる．これは Date-Tanaka による周期戸田格子のリーマンテータ関数解 [DT] を超離散化したものと類似の構造をしている．(35) を逆超離散化した関数のプロットが [KS] にあり，滑らかなソリトンの周期的衝突が観測できる．

あとがき

式 (35) で $g = 2$ の場合は本質的に周期的戸田方程式の 2-ソリトン解の超離散化 [KmT] に帰着することを井上玲氏より教えていただいた．ここに感謝いたします．

参考文献

- [B] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London (1982).
- [Be] H. A. Bethe, Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, *Z. Physik* **71** (1931) 205–231.

- [DT] E. Date and S. Tanaka, Periodic multi-soliton solutions of Korteweg-de Vries equation and Toda lattice, *Prog. Theoret. Phys. Suppl.* **59** (1976) 107–125.
- [FOY] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, Energy functions in box ball systems, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 1379–1392.
- [HKT] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, Soliton cellular automata associated with crystal bases, *Nucl. Phys. B* **577**[PM] (2000) 619–645.
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 274–308.
- [Ka] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.* **63** 465–516 (1991)
- [KMN] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Affine crystals and vertex models, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (suppl. 1A), (1992) 449–484.
- [KmT] T. Kimijima and T. Tokihiro, Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization. *Inverse Problems* **18** (2002) 1705–1732.
- [KR] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux. *J. Soviet Math.* **41** (1988) 925–955.
- [KN] A. Kuniba and T. Nakanishi, The Bethe equation at $q = 0$, the Möbius inversion formula, and weight multiplicities: I. The $sl(2)$ case, *Prog. in Math.* **191** (2000) 185–216. (math.QA/9909056)
- [KOTY] 国場敦夫, 尾角正人, 高木太一郎, 山田泰彦, 「箱玉系の頂点作用素と分配関数」, 数理解析研究所講究録 **1302** 「可積分系研究の新展開-連続・離散・超離散」 (2003) 91–107.
- [KS] A. Kuniba and R. Sakamoto, Bethe ansatz in a periodic box-ball system and ultradiscrete Riemann theta function, *J. Stat. Mech.* (2006) P09005. (math.QA/0606208)
- [KS2] A. Kuniba and R. Sakamoto, Combinatorial Bethe ansatz and ultradiscrete Riemann theta function with rational characteristics. (nlin.SI/0611046)
- [KSY] A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Tau functions in combinatorial Bethe ansatz. (math.QA/0610505)
- [KTT] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system, *Nucl. Phys. B* **747**[PM] (2006) 354–397. (math.QA/0602481)

- [KT] A. Kuniba and A. Takenouchi, Bethe ansatz at $q = 0$ and periodic box-ball systems, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 2551–2562. (nlin.SI/0509001), Periodic cellular automata and Bethe ansatz, Proceedings of 23rd DGMTP in press. (math-ph/0511013), 「 $q = 0$ でのベ-テ仮説と周期箱玉系」応力研研究会報告 N0.17ME-S2 (2006).
- [NY] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, Selecta Mathematica, New Ser. **3** (1997) 547–599.
- [S] A. Schilling, X=M Theorem: Fermionic formulas and rigged configurations under review. MSJ Memoirs in press (math.QA/0512161)
- [TTMS] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, Phys. Rev. Lett. **76** 3247–3250 (1996)
- [YYT] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, Fundamental cycle of a periodic box-ball system, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 99–121.

(2006年11月29日)