無限小面ベクトル $d\mathbf{S}$ について

実変数 x, y, z の滑らかな関数 $f = f(x, y, z)$ の (全) 微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{1}$$

は熱力学でもお馴染みだろう．以下では $\mathbf{r} = (x, y, z)$，$f = f(\mathbf{r})$ などとも書く．左辺 df は $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})$ の意である．ただし $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$．一方右辺は，$f$ の**勾配** $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ と $d\mathbf{r}$ の内積 $\nabla f\, d\mathbf{r}$ であるから，(1) は

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \nabla f\, d\mathbf{r} \tag{2}$$

と表される．$\mathbf{r} = (x, y, z)$ を実３次元空間の直交座標と見做すと，関係式

$$f(\mathbf{r}) = c \text{ (定数)} \tag{3}$$

は滑らかな曲面を定める．これを $\mathcal{S}$ と呼ぼう．(2) は ∇f が $\mathcal{S}$ と直交する，つまり法線方向を向いている事を示している．これを見るには $d\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}$ における $\mathcal{S}$ の接平面内に取ればよい．この時 (2) の左辺は $d\mathbf{r}$ の２次以上の無限小量なので[1]，右辺の内積 (１次の無限小量) はゼロとなり，$\nabla f \perp d\mathbf{r}$ が従うからである．(力学のポテンシャルと保存力の関係を思い出そう．)

曲面 (3) は２次元なので，少なくとも局所的には二つの独立な実パラメーター u, v を用いて

$$x = x(u, v),\ \ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v), \quad \text{或いはまとめて}\ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{4}$$

と表示される．この時二つのベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\right) \tag{5}$$

は共に $\mathcal{S}$ の接平面内にある．これを示すには (4) を (3) に代入した式

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = c \tag{6}$$

は恒等式である事に注意しよう．この両辺を u, v で偏微分すれば

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z(u, v)}{\partial u} = \nabla f\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \tag{7}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z(u, v)}{\partial v} = \nabla f\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{8}$$

が得られ，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は共に法線向きの ∇f と垂直となって接平面内にある事が従う．以上から，

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du, \qquad \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv \tag{9}$$

とおくと，これらは曲面 $\mathcal{S}$ の点 $\mathbf{r}$ における接平面内の二つの無限小ベクトルを定める事が分かる．$\mathcal{S}$ の無限小面ベクトル $d\mathbf{S}$ とは，接平面に垂直で，長さが $\mathbf{e}_u$ と $\mathbf{e}_v$ のなす平行四辺形の面積に等しいベクトルのことである．(一般に $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$ は互いに垂直とも長さ 1 とも限らない．) これは外積

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v \tag{10}$$

に他ならない[2]．(10) に (9), (5) を代入すると

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)dudv. \tag{11}$$

ここで変数変換 $(x, y) \to (u, v)$ による２重積分の書き換え $\int\int G(x, y)dxdy = \int\int G(x(u, v), y(u, v))Jdudv$ に於いて，面積要素の間に

$$dxdy = Jdudv, \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{12}$$

という等式が成り立つ事を想起しよう．2×2 の行列式 J は Jacobian と呼ばれる．従って (11) の第３成分は $dxdy$ に等しい[3]．他の成分も同様であり，最終結果

$$d\mathbf{S} = (dydz,\ dzdx,\ dxdy)|_{\mathcal{S}} \tag{13}$$

が得られる．ここで $|_{\mathcal{S}}$ は，x, y, z は独立ではなく曲面の条件式 (3) があり，従って dx, dy, dz には 条件 $\nabla f\, d\mathbf{r} = 0$ が課されている事を忘れないための添え書きである．(なので，忘れないよ，という人は省いて良い．)

[1] この性質が接平面の定義と思って良い．

[2] 向きは $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, d\mathbf{S})$ が右手系をなすようにとった．

[3] 実は $dxdy$ といった記号は単なる積ではなく，$dx \wedge dy$ と表記して微分 2 -形式として扱うべき対象物である．この様な微分形式よる Maxwell 方程式の定式化については拙著「電磁気学とベクトル解析」数理科学 (サイエンス社) 2017 年 5 月号を参照されたい．