変位電流

1. 点 O からある図形を見込む立体角とは，O からその図形を見込む錐体が O を中心とする単位球から切り取る面積として定義される．半径 r の球面上で半径 $r\sin\theta$ の円に囲まれる部分を中心から見たときの立体角 $\Omega(\theta)$ を求めよ $(0 \le \theta \le \pi)$．ただし「囲まれる部分」とは $\theta = 0$ のときに面積 0 となる方であるとする．

2. 点電荷 q の作るクーロン電場において任意の閉曲線 C を淵とする曲面 S を貫く電束の大きさを求めよ．

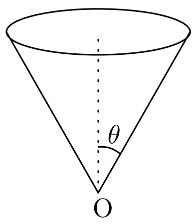
3. 負の z 軸上を原点に向かって電流 I が流れ込み，原点に一定の増加率 $\frac{dq}{dt} = I$ で電荷が蓄積されていく．どのような磁場ができるか．

4. xy 平面上を，原点に向かって一様に電流が集まり，原点に一定の増加率 $\frac{dq}{dt} = I$ で電荷が蓄積されていく．どのような磁場ができるか．

5. 負の z 軸上を原点に向かって電流 I が流れ，原点からは xy 平面状に一様に拡散してゆく．どのような磁場ができるか．

解答例

1.



球の中心からこの円を見込む錐体は中心角 θ の円錐である．中心角が ϕ の円と $\phi + d\phi$ の円で囲まれる細い円環の面積は $(2\pi r \sin\phi) r d\phi$ であるから

$$\int_0^\theta 2\pi r^2 \sin\phi d\phi = 2\pi r^2 (1 - \cos\theta). \tag{1}$$

$r = 1$ とおいて

$$\Omega(\theta) = 2\pi(1 - \cos\theta). \tag{2}$$

特に $\Omega(0) = 0$ (1 点)，$\Omega(\pi) = 4\pi$ (全球) である．

2. 面 S を貫く電束とは面積分 $\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}\, d^2\mathbf{S}$ のことであった．特に点電荷から出る全電束は $\frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times 4\pi R^2 = q$ である．点電荷から閉曲線 C を見込む立体角を Ω としてガウスの法則の導出と同じ議論を用いると，クーロン電場が (距離)$^{-2}$ に比例することから S を貫く電束は

$$\frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times \Omega R^2 = \frac{q\Omega}{4\pi}. \tag{3}$$

3. アンペール・マクスウェルの法則 $\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$ を曲面 S について面積分する．その際ストークスの定理 $\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\, d^2\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} d\mathbf{l}$ を用いると

$$\int_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0(C \text{ を貫く電流＋変位電流}). \tag{4}$$

ここで閉曲線 C は S の淵である．変位電流がなければこれはアンペールの法則である．

　題意の状況では，対称性から z 軸を中心とし，$+z$ 方向に右ネジを進めるような渦状の磁場ができる．そこで C を z 軸を中心とする円周にとる．原点から C を見る円錐の中心角を θ とする．$\theta = 0$ は z 軸のプラス側，$\theta = \pi$ は z 軸のマイナス側とする．C を貫く電束は問 1,2 より $\frac{q\Omega(\theta)}{4\pi} = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta)$. 変位電流 $\int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d^2\mathbf{S}$ は C を貫く電束の時間微分 $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d^2\mathbf{S}$ に等しい．従って $\frac{dq}{dt} = I$ により

$$C \text{ を貫く変位電流} = \frac{I}{2}(1 - \cos\theta). \tag{5}$$

今の場合，半無限の電流は原点に留まるために C が $z \geq 0, z < 0$ のどちらにあっても C を貫いてはいない．従って (4) の右辺は変位電流だけからなり，(5) を代入すればよい．(4) の左辺は C の半径を ρ として $2\pi\rho|\mathbf{B}|$．従って磁場の大きさは

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(1 - \cos\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \pi,\ +z \text{ 方向に右ネジを進める向き}). \tag{6}$$

特に $\theta \simeq \pi$ では無限に長い電流の場合の結果 $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ を再現し，$\theta \simeq 0$ ではその半分となっている．

4. 対称性から z 軸を中心とする渦状の磁場ができる．その向きは $z > 0$ の領域では $+z$ 方向に右ネジを進める方向である．大きさを求めるには問 3 と同様に (4) を適用すればよい．やはり C を貫く真電流はなく，原点に貯まる点電荷の変化が作る変位電流だけが寄与する．従って結果は問 3 と同じで (6) で与えられる．$z < 0$ の領域では $z > 0$ での磁場と対称で逆向きの磁場ができる．以上の結果を (6) に揃えて書くと

$$|\mathbf{B}| = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(1 - \cos\theta) & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},\ +z\ \text{方向に右ネジを進める向き}), \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(1 - \cos(\pi - \theta)) & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi,\ -z\ \text{方向に右ネジを進める向き}). \end{cases} \tag{7}$$

5. 対称性から z 軸を中心とする渦状の磁場ができる．変位電流はなく，定常電流なので z 軸を中心とする半径 ρ の円周についてアンペールの法則を適用する．$z < 0$ では C を貫く電流は I であるから磁場の強さは

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}. \tag{8}$$

向きは $+z$ 方向に右ネジを進める向きを持つ．$z > 0$ では C を貫く電流はない．よって磁場は 0 である．

あるいは次のように考えてもよい．

$$\text{問 5 の電流} = (\text{問 3 の電流}) - (\text{問 4 の電流})$$

であるので，問 5 の磁場=(問 3 の磁場)−(問 4 の磁場) としてもよい．確かに (6) と (7) から (8) を得る．

なお，(6) の結果は半無限の電流についてビオ・サバールの法則を適用しても得られる．その際変位電流の寄与は 0 である．理由を考えよ．