補遺：ベクトルポテンシャルの性質

この補遺では定常電流，静磁場に話を限る．ベクトルポテンシャルを

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' \quad \text{(全空間での体積積分)} \tag{1}$$

と与えると，ビオ・サバール則による磁束密度は $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ と表されるのであった．ここで $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ は電流密度．$\mathbf{A}' = (1) + \mathrm{grad}\,\psi$ (ψ は任意のスカラー) とすると，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi = 0$ により同じ $\mathbf{B}$ が $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}'$ とも表される．従って (1) は，$\mathbf{B}$ を与える (無数の) ベクトルポテンシャルのうちの一つであると認識しよう．この補遺の目的は以下の性質を示すことである．

(1) の $\mathbf{A}$ は $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ を満たす．

$\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ を計算しよう．(1) で x, y, z に依存するのは $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ だけであることに注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(i_x(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + i_y(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + i_z(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(i_x(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + i_y(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + i_z(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}'.\end{aligned} \tag{2}$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = -\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

であることを用いた．y, z 偏微分についても同様である．

例として (2) の第 1 項に注目しよう．体積積分 $\int(\cdots)d\mathbf{r}'$ とは $\iiint(\cdots)dx'dy'dz'$ という 3 重積分のことである．(積分範囲はいずれも $-\infty$ から ∞ まで．) そこで y', z' に関する積分 $\iint dy'dz'$ はそのままにして x' に関してだけ部分積分すると

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\left[\frac{i_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]_{x'=-\infty}^{x'=\infty}dy'dz' + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\partial i_x(\mathbf{r}')}{\partial x'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{3}$$

第 1 項は，電流の流れている領域が有限の範囲であれば $i_x(x'=\pm\infty, y', z') = 0$ なので 0 である．また $x' = \pm\infty$ という無限の彼方まで流れている場合でも因子 $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ により 0 である事が議論できる．従って (3) は第 2 項のみが残る．(2) の第 2,3 項についても同様の書き変えをすると (2) は以下の様に表される．

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\frac{\partial i_x(\mathbf{r}')}{\partial x'} + \frac{\partial i_y(\mathbf{r}')}{\partial y'} + \frac{\partial i_z(\mathbf{r}')}{\partial z'}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'.$$

ここで電荷保存を表す連続の式 $\mathrm{div}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ を思い出そう．今の場合，時間に依存しない状況を想定しているので $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ である．よって定常電流は $\mathrm{div}\,\mathbf{i} = 0$ を満たす (授業でも注意した)．従って $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ が示された．

本補遺の内容は技術的ウェイトが大きいので仔細を理解できなくても電磁気学の修得に大きな影響はない．