電気双極子

正負一対の点電荷 $(\pm q)$ が微小な距離 l だけ離れている電荷配置を（電気）双極子という．

$q > 0$ とし，負の点電荷 $-q$ から 正の点電荷 $+q$ へ向かう長さ l のベクトルを $\mathbf{l}$ とする．ベクトル

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

を電気双極子モーメントという．

電気双極子の中心を原点とし，位置ベクトル $\mathbf{r}$ における電場を $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ とする．原点からの距離 $r = |\mathbf{r}|$ が l に比べて十分大きなところでは，電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は近似的に次式で与えられることを示せ．

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

ここで，$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ は $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトルである．

電気力線を描いてみよ．電荷の総和が 0 なので，十分遠方では r^{-2} より強く減衰している．

解答例

ここでは xyz 直交座標系を用いて示す．(用いないやり方もある．) スペース節約のため，3 成分のベクトルはみな横ベクトルとして表記する．$\pm q$ は位置ベクトル $(0, 0, \pm l/2)$ にあるとすると

$$\mathbf{l} = (0, 0, l), \quad \mathbf{p} = q\mathbf{l} = (0, 0, ql).$$

また，電場の観測点の位置ベクトルを

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

とおく．電場の重ね合わせの原理から，

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{l}/2}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}/2|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{l}/2}{|\mathbf{r} + \mathbf{l}/2|^3}\right). \tag{1}$$

まず (1) x 成分を考える．

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - l/2)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z + l/2)^2)^{3/2}}\right).$$

$f(z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ とおくと

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}(f(z - l/2) - f(z + l/2)) \simeq -\frac{qlx}{4\pi\varepsilon_0}f'(z) = \frac{3qlxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}. \tag{2}$$

($l \ll r$ から，f の高階の微分の補正の寄与は微小であることを示せる．) y 成分も同様に

$$E_y \simeq \frac{3qlyz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}. \tag{3}$$

(1) の z 成分は

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z - l/2}{(x^2 + y^2 + (z - l/2)^2)^{3/2}} - \frac{z + l/2}{(x^2 + y^2 + (z + l/2)^2)^{3/2}}\right).$$

$g(z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ とおいて

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(g(z - l/2) - g(z + l/2)) \simeq -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}g'(z) = \frac{ql(3z^2 - r^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^5}. \tag{4}$$

(2), (3), (4) から　$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x, E_y, E_z)$　は

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\Big(3qlxz,\ 3qlyz,\ 3qlz^2 - r^2\Big) \\
&= \frac{3qlz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(x, y, z) - \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(0, 0, 1) \\
&= \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad \text{(導出終)}
\end{aligned}$$

参考までに，一般の点電荷分布についてはルジャンドル多項式による多極子展開がある．