静電エネルギー

1. ウラン ^{238}U の原子核は電子の電荷の -92 倍の電荷をもち、その半径は $9.6 \times 10^{-13}\mathrm{cm}$ である。原子核を内部まで一様に帯電した球と考えてその電気エネルギーを計算せよ。また、原子核の中で、電荷は表面だけに一様に分布していると考えて計算してみよ。

2. 電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = a\frac{\mathbf{r}\exp(-\lambda r)}{r}$$

で与えられている。但し $r = |\mathbf{r}|$, で $a, \lambda > 0$ は定数である。この時、静電ポテンシャル ϕ と電荷密度関数 ρ を求めよ。

解答例

1. 原子核の中心を中心とする球面を考えてガウスの法則を適用。原子核の半径を a, 全電荷を Q と書く。原子核内部 $(0 < r < a)$ と外部 $(r > a)$ での物理量にそれぞれ in, out という添え字をつけることにしよう。電場 $\mathbf{E}$ は中心から放射状に向くので、その大きさ E のみを問題にする。

[1] 原子核内部まで一様に帯電しているとした場合。

$$\text{電場：}\quad E_{in} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \qquad E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$
$$\text{静電ポテンシャル：}\quad \phi_{in} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(3a^2 - r^2), \quad \phi_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

E は授業でやった。 ϕ は 定数以外の本質的部分は $-E$ を r で積分すればよい。定数部分は無限遠で $\phi_{out} = 0$ 且つ $r = a$ において $\phi_{in} = \phi_{out}$ となる様に調整されている。

静電エネルギー U は

$$(1)\ \frac{1}{2}\int \rho\,\phi\; d^3\mathbf{r}, \qquad (2)\ \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\; d^3\mathbf{r}$$

のどちらの体積積分で計算してもよい。両者の一致の確認は理解の助けになるので両方とも計算のプロセスを与えよう。

以下一般的注意として球対称な関数 (従って $f(\mathbf{r}) = f(r)$) の体積積分は

$$\int f(\mathbf{r})\; d^3\mathbf{r} = \int f(r) 4\pi r^2 dr$$

として一変数 r についての通常の積分となることを用いる。これは球を半径 $r \sim r + dr$ の薄い球殻に分割し、そこでの関数値 $f(r)$ に球殻の体積 $4\pi r^2 dr (=$ 球面積 $4\pi r^2 \times$ 厚み $dr)$ を掛けて足しあわせている事に相当。

(1) による計算。 電荷密度 $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3} (= r$ によらない定数）とおく。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a \rho\,\phi_{in} 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}.$$

(2) による計算。電場は原子核の内部でも外部にも 0 でないので寄与を二つに分けて計算しよう。

$$U_{in} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{内}} E^2\; d^3\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a E_{in}^2\; 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 a},$$
$$U_{out} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{外}} E^2\; d^3\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty E_{out}^2\; 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

なので、たしかに $U = U_{in} + U_{out}$ となって (1) による結果と一致する。

[2] 原子核表面のみに一様に電荷 Q が分布しているとした場合。

ガウスの法則から

$$\text{電場：}\quad E_{in} = 0, \qquad E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$
$$\text{静電ポテンシャル：}\quad \phi_{in} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \quad \phi_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

外部の電場や静電ポテンシャルは [1] と同じになることに注意。

(1) による計算。 原子核表面は等電位面になるので

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{表面}} \rho\,\phi\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2}Q\phi_{\text{表面}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

(2) による計算。電場は外部のみ0でなくそこでは [1] の場合に等しい（上の注意）。よって [1] の U_{out} を用いて $U = U_{out}$ と結論してよい。これは確かに (1) による上の計算結果と一致している。

最後に $Q = 92e, a = 9.6 \times 10^{-13} cm$ を代入すると U の値は

$$1.22 \times 10^{-10} J(\text{内部まで帯電とした場合}) \qquad 1.02 \times 10^{-10} J(\text{表面のみとした場合})$$

2. 電荷密度関数 ρ を求めるには、ガウスの法則の微分形 $\rho = \varepsilon_0 \mathrm{div}\ \mathbf{E}$ に代入すればよい。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\exp(-\lambda r)}{r}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} - \lambda\frac{x^2}{r^2}\right)\exp(-\lambda r)$$

などにより、

$$\rho = \varepsilon_0 a \left(\frac{2}{r} - \lambda\right)\exp(-\lambda r).$$

$a > 0$ とすると，$r < \frac{2}{\lambda}$ には正の電荷が，$r > \frac{2}{\lambda}$ には負の電荷が分布している。

無限遠を基準点とした静電ポテンシャルは、動径方向に線積分すれば求められる。動径方向の座標を s として $r = s$ における電場の大きさを $E(s)$ と書けば $E(s) = ae^{-\lambda s}$. よって

$$\phi = \phi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(s)ds = \frac{a\exp(-\lambda r)}{\lambda}.$$

確かに $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\ \phi$ となっていることを確かめよ。