

電磁誘導

1. 半径 a 単位長さ辺りのまき数 n のソレノイドに流れる電流が時間に依存して $I(t)$ と与えられるとき, ソレノイドの内外にどのような電場が誘導されるか.

2. z 方向に一様な磁場の中で点電荷 q が円運動している ($q > 0$). 磁場を強くして電荷の円軌道に沿って誘導電場ができたとすると電荷は加速されるか, 減速されるか. 磁場の時間変化が十分にゆっくりしていて, 電荷はほぼ近似的に円運動をしながらその半径を少しずつ変える場合, 半径は増大するか減少するか.

解答例

1. アンペールの法則

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

は、直線電流に巻きつくように磁場ができることを意味していた。それと同様に、電磁誘導の法則

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

は、ソレノイド内の磁場の変化が誘導電場の渦をつくることを意味する。ソレノイド内には一様な磁束密度 $\mu_0 n I(t)$ が生じる。従って中心軸から距離 r のチューブを貫く磁束は

$$\Phi = \begin{cases} \pi \mu_0 n r^2 I(t) & 0 \leq r \leq a, \\ \pi \mu_0 n a^2 I(t) & r \geq a \end{cases}$$

である。半径 r の円周に沿う誘導電場の線積分と $-\frac{d\Phi}{dt}$ が等しいことから、誘導電場の大きさを $E(r)$ とすると

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 n r}{2} \left| \frac{dI}{dt} \right| & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\mu_0 n a^2}{2r} \left| \frac{dI}{dt} \right| & r \geq a. \end{cases}$$

誘導電場の向きは $\frac{dI}{dt} > 0$ の場合は I と逆向き、 $\frac{dI}{dt} < 0$ の場合は I と同じ向き。

2. 磁場を $+z$ 向きとする。 $q > 0$ なので電荷は xy 平面内を時計回りに円運動する。磁場を強くすると、 $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ は $-z$ 方向を向くので誘導電場はやはり時計回りに生じる。よって点電荷は加速する。

点電荷の質量を m 、近似的な円運動の速さを v 、半径を r とする。点電荷に及ぼされる誘導電場の大きさは

$$2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad \text{よって} \quad E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

近似的な円運動について

$$\text{動径方向の運動方程式} : m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (1)$$

$$\text{接線方向の運動方程式} : m \frac{dv}{dt} = qE = \frac{qr}{2} \frac{dB}{dt} \quad (2)$$

が近似的に成り立つ。(1) から $r = \frac{mv}{qB}$ 。これの時間微分を (2) を用いて計算する。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{dv}{dt} - \frac{mv}{qB^2} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2B} \frac{dB}{dt} < 0.$$

したがって半径は減少する。負の点電荷ではどうなるか考えよ。