

補遺：強制振動の一般解（定数変化法）

λ, ω を定数, $f = f(t)$ を与えられた関数とし, $x = x(t)$ に対する常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \quad (1)$$

を考える. 定数係数型の強制振動方程式の一種である. (1) の一般解を与えよう. α_1, α_2 を 2 次方程式 $\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2 = 0$ の解

$$\alpha_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}, \quad \alpha_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

とする. 以下では ω と λ の大小関係は仮定しない. 解の挙動はそういった事情に依るが, 以下で述べる一般解の構成には影響せず, これらのパラメーターは実数である必要もない.

$y = y(t)$ に対する斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (2)$$

は以下の解を持つ.

$$y_1(t) = \exp(\alpha_1 t), \quad y_2(t) = \exp(\alpha_2 t) \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ のとき}, \quad (3)$$

$$y_1(t) = \exp(\alpha_1 t), \quad y_2(t) = t \exp(\alpha_1 t) \quad \alpha_1 = \alpha_2 \text{ のとき}. \quad (4)$$

どちらの場合も y_1 と y_2 は独立である, つまり定数 a_1, a_2 による線形結合 $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ が t に依らずに恒等的に 0 になるのは $a_1 = a_2 = 0$ に限られる. W を

$$W = W(t) = y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt} = \begin{cases} (\alpha_2 - \alpha_1) \exp((\alpha_1 + \alpha_2)t) & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ \exp(2\alpha_1 t) & \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases} \quad (5)$$

と定義する (Wronskian と呼ばれる). W は 0 にならない事に注意しよう.

さて, (2) の一般解は独立な解の線形結合

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 \quad (a_1, a_2 : \text{任意定数}) \quad (6)$$

として与えられる. 一方, 非斉次方程式 (1) の一般解は, y_1, y_2 を用いて

$$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + w \quad (a_1, a_2 : \text{任意定数}) \quad (7)$$

と与えられる. ここで $w = w(t)$ は (1) の特殊解 (任意定数を含まなくても良い一つの解) である. その理由は $x - w$ は必然的に斉次式 (2) の解になるからである. よって (1) の一般解を得るにはその特殊解 w を一つ構成できれば良い. 特殊解 w を

$$w = b_1(t) y_1(t) + b_2(t) y_2(t) \quad (8)$$

の形で探そう. (6) の定数部分に t 依存性を持たせるという意味で定数変化法と呼ばれる.

$$\frac{dw}{dt} = b_1 \frac{dy_1}{dt} + b_2 \frac{dy_2}{dt} + \left(\frac{db_1}{dt} y_1 + \frac{db_2}{dt} y_2 \right)$$

であるが, 右辺で $(\dots)$ 部分 = 0 という条件を課して探しても構わない. これを仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} + 2\lambda \frac{dw}{dt} + \omega^2 w &= \frac{d}{dt} \left[b_1 \frac{dy_1}{dt} + b_2 \frac{dy_2}{dt} \right] + 2\lambda \left[b_1 \frac{dy_1}{dt} + b_2 \frac{dy_2}{dt} \right] + \omega^2 [b_1 y_1 + b_2 y_2] \\ &= \frac{db_1}{dt} \frac{dy_1}{dt} + \frac{db_2}{dt} \frac{dy_2}{dt} + b_1 \left[\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy_1}{dt} + \omega^2 y_1 \right] + b_2 \left[\frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy_2}{dt} + \omega^2 y_2 \right] \\ &= \frac{db_1}{dt} \frac{dy_1}{dt} + \frac{db_2}{dt} \frac{dy_2}{dt}. \end{aligned}$$

以上により, b_1, b_2 が以下の方程式を満たせば w (8) は (1) の特殊解である.

$$\frac{db_1}{dt}y_1 + \frac{db_2}{dt}y_2 = 0, \quad \frac{db_1}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{db_2}{dt}\frac{dy_2}{dt} = f.$$

これを解いて

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{y_2 f}{W}, \quad b_1(t) = b_1(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)} ds, \quad (9)$$

$$\frac{db_2}{dt} = \frac{y_1 f}{W}, \quad b_2(t) = b_2(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)} ds. \quad (10)$$

ここで t_0 は定数. これを (8), (7) に代入すると $b_1(t_0), b_2(t_0)$ からの寄与は定数 a_1, a_2 の再定義に吸収できる. よって (9), (10) において $b_1(t_0), b_2(t_0)$ は省き, 定積分は「漫然」と不定積分としておいてよい. 結局 (1) の一般解は (3)–(5) の y_1, y_2, W を用いて以下の様に与えられる.

$$x(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) - y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)} ds \quad (a_1, a_2 : \text{任意定数}).$$

典型的な外力 $f(t)$ について, この積分を実行して具体形を書き下してみよう.

補遺の補.

(1) は強制振動の方程式の 1 例に過ぎない. 線形方程式の範囲でも

$$\text{Mathieu 方程式:} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + (a + \varepsilon \cos t)x = 0$$

などはブランコのモデルでもあり, 解の挙動により, パラメーター (a, ε) 平面が仔細な領域に分割される様子が興味深い. 非線形方程式となると飛躍的に興味深い現象が視野に入る. 代表的な例として

$$\text{van der Pol 方程式:} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

を挙げておく. どの様な系のどの様な挙動を捉えるものか, 想像してみよう. 「多重スケール法」や「くりこみ群」を用いた解析も行われている.