ガウスの法則の例

xy 平面上に一様に面密度 σ $(\mathrm{C/m^2})$ で電荷が分布している．$\sigma > 0$ とする．

(1) クーロンの法則を用いて電場を求めよ．

(2) ガウスの法則を用いて電場を求めよ．

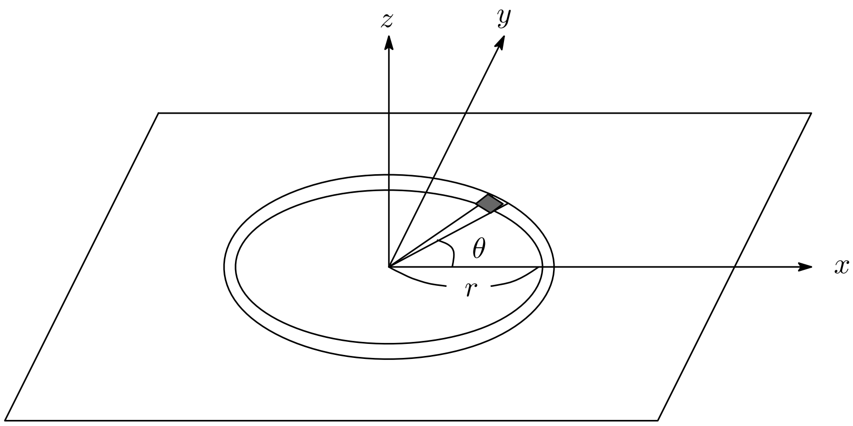
解答例

位置座標 (x,y,z) における電場を $\mathbf{E}(x,y,z)$ とすると，対称性から

$$\mathbf{E}(x,y,z) = (0,0,E(z)), \quad E(-z) = -E(z).$$

また， $z>0$ の場合 $E(z)>0$ である．すなわち，電場は $z>0$ の領域では $+z$ 方向を向いており，$z<0$ の領域では $-z$ 方向を向く．電場の大きさ $E(z)$ が z にどのように依存するかは対称性の考察だけからは分からない．これを，クーロンの法則やガウスの法則を用いて決定しよう．

(1)



$z>0$ の領域を考えよう．上図で，xy 平面上の極座標が (r,θ) から $(r+d\theta,\theta+d\theta)$ の範囲にある微小領域（塗りつぶされた領域）は 面積 $dr\times rd\theta$ の長方形である．従ってそこには $\sigma d\theta rdr$ の電荷があり，位置 $(0,0,z)$ に大きさ

$$\frac{\sigma d\theta rdr}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}$$

の電場をつくる．この電場の z 成分の大きさは

$$\frac{z\sigma d\theta rdr}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}$$

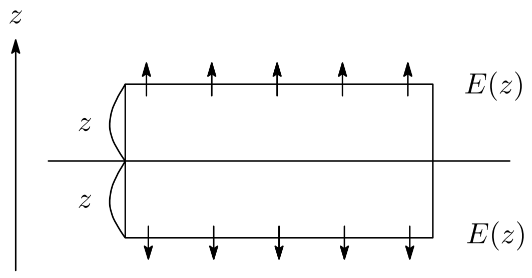
である．$E(z)$ はこれを全平面上で積分すればよいので

$$\begin{aligned} E(z) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} rdr \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

最後の積分は例えば $r=z\tan\alpha$ とおいて α について 0 から $\pi/2$ までの積分にすればよい．

$E(z)$ は z に依存せず，$z>0, z<0$ それぞれの領域で一様な電場ができることがわかる．

(2)



面電荷のある平面の一部を底面積 S の柱体で取り囲む．その様子を横から見たのが上の図である．ふたつの底面は いずれも xy 平面から距離 z にあって，xy 平面と平行になるようにとる．ガウスの法則によると

$$\varepsilon_0 \int_{\text{柱体表面}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \text{柱体内の全電荷}$$

である．電場は z 成分以外は 0 なので，柱体の側面は面積分に寄与しない．従って両辺を計算した結果は

$$\varepsilon_0 E(z) \times 2S = S\sigma.$$

よって

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

これは (1) の結果と一致している．