

箱玉系の頂点作用素と分配関数

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

阪大基礎工 尾角正人 (Masato Okado)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

防衛大応物 高木太一郎 (Taichiro Takagi)

Department of Applied Physics, National Defense Academy

神戸大理 山田泰彦 (Yasuhiko Yamada)

Department of Mathematics, Kobe University

1 Physical Combinatorics Chronicle

21 世紀初頭における物理的組み合わせ論 (Physical Combinatorics) の重要課題の一つは

フェルミ型公式を理解せよ

である。フェルミ型公式とは何か。アフィン量子群の Kirillov-Reshetikhin 表現のテンソル積を古典部分代数について既約分解する。その際生じる既約表現の多重度があるやり方で q アナログに持ち上げると、それがベータ仮説に起源を持つ $q-2$ 項係数の積の和にピタリと一致するのである。 A 型の場合はコストカ多項式 [Ma] を含む。 $q-2$ 項係数の積の和という構造は、ベータ方程式は重根を許さないという制約のもとでの数え上げに起因し、その意味でフェルミオンの性的であると呼ばれる。ベータ仮説は Bethe により 1931 年に発明された [Be]。彼はストリング仮説に基づいて sl_2 の場合に初めてフェルミ型公式を書き下し、 $q = 1$ の場合に既約表現の多重度と一致することを証明した。「ベータ仮説の組み合わせ論的 (形式的) 完全性」と呼ばれる最初の等式である。論文の終わりには訪れたローマで Fermi 教授に多くの議論をしてもらったと謝辞を述べている。

これが Physical Combinatorics の世界の開闢であったとすると、1986 年の Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) [KKR, KR] の結果はモーセによる出エジプトに相当する。彼らはベータ仮説をして、模型の物理量を計算するための道具という境遇から解き放ち、表現論や代数的組み合わせ論等の新天地へと導いた。フェルミ型公式の各項をラベルする自然な組み合わせ論的对象物 Rigged Configuration を開発し、ヤング標準盤への全単射を構成するなど、その後の発展の礎となる息吹を与えた。フェルミオンの数え上げをせよ、即ち「汝、重根を許すべからず」というのは重要な Testimony となった。

しかしフェルミ型公式がその永い眠りから真に目覚めるにはもう一つのアイデアの到来、合流が必要であった。それは Corner Transfer Matrix (CTM) という新教の教えである。それをもたらした救世主とはもちろん Baxter ([B] パイブル 13 章) である。(これは 1980 年頃発明されたので聖書の年代関係とは逆転している。) CTM のトレースからも様々な q 多項式が生成される。1980 年代から 90 年代にかけて、それらの極限 (q 級数) がアフィン・リー環、共形場理論の指標を与えることが発見され [DJKMO]、研究は一挙に活発化する。特に 90 年代にはいると Stony Brook グループ [M] などにより KKR のフェ

ルミ型公式はレベル切断された文脈で次々と再発見される。また排他的な準粒子描像が提出され、レベル0作用との関連が議論されるなど注目を集め、世界に多くの使徒を送り出すこととなった。

CTM から生成される q 級数がアフィン・リー環の指標に一致するという計算結果は 80 年代後半に集積されていたが、90 年代初期には結晶基底の理論の到来 [Ka] によって一般的に確立された [KMN]。アフィン・リー環の可積分最高ウェイト表現の結晶基底はパスによる実現を持つ。これにより多くの使徒の教えは合法化された。特に A 型の場合に、コストカ多項式が結晶基底のエネルギー母関数として実現 [NY] されたことから一般の場合の命題が以下のフェルミ型公式として明確な輪郭を持つにいたった。

$$X = M$$

ここで X とは Kirillov-Reshetikhin 表現から来る結晶基底のテンソル積の元のうち最高ウェイト条件を満たすものにわたるエネルギー母関数であり、古典制限 1 次元状態和と呼ばれることもある。 M はベテ仮説に起源を持つ $q-2$ 項係数の積の和である。これは新教と旧教の相補的な融合である。新教 CTM の産物 X には初めから Demazure 加群の分岐関数 [KMOTU] という意味がついている。一方旧教ベテ仮説の M は明示公式である。現時点では A 型の場合 [KKR, KSS] とそれ以外の非例外型の一部 [OSS] について証明されているが、一般には結晶基底の存在自体も未知の命題である。以上述べたことはフェルミ型公式の研究の流れの一部にすぎない。より詳しくは文献 [HKOTY1, HKOTT] の序章を見られたい。

2 箱玉系のもたらす視点

n 色の箱玉系 [T]、すなわちアフィンリー環 $A_n^{(1)}$ に付随する基本 soliton cellular automaton を考える。通常のように右に玉が動いていく時間発展のみを考えることにすると、箱玉系は、ある場所（左端）から右側に無限に連なる箱の並びの上で定式化できる。本稿では専らこのような半無限の状態空間を考える。 B_k を $A_n^{(1)}$ の k 階対称テンソル表現のクリスタル、 B'_k を $A_{n-1}^{(1)}$ の k 階対称テンソル表現のクリスタルとする。箱玉系とクリスタルの関係については [HHIKTT, FOY, HKT] を参照のこと。箱玉系の状態空間には 2 通りの描像がある。

$$\begin{aligned} \text{bare picture : } & \mathcal{P} = B_1 \otimes B_1 \otimes B_1 \otimes \cdots |_{\text{b.c}} \\ \text{quasi particle picture : } & \mathcal{S} = \cup_l \cup_{k_1, \dots, k_l} \text{Aff}(B'_{k_1}) \otimes \cdots \otimes \text{Aff}(B'_{k_l}) |_{\text{e.c}} \end{aligned}$$

\mathcal{P} はいろいろな状態を取る箱が並んでいるという記述である。b.c とは十分右の遠方で空箱ばかりになるという境界条件 (boundary condition) を表す。一方 \mathcal{S} はソリトンとその位相（位置）による記述である。 $\text{Aff}(B'_k) = \{b[d] | b \in B'_k, d \in \mathbb{Z}\}$ において、 b がソリトンを構成する玉の種類を指定し、 d が位相の情報を受け持つ。位相（位置）はテンソル積において、ソリトンのいる成分がある基準点から何番目にあるかを表す数である。また、e.c とはソリトンの位相がある種の排他則に従うことを反映する排他条件 (exclusion condition) である。詳細は後述する。全て空箱の状態を真空（基底状態）と考えるならば、 \mathcal{S} は励起モードによる記述であり、それが準粒子的な振る舞いをするソリトンであることから準粒子描像と呼んだ。十分時間発展させて全ての散乱を終了させた後にはソリトンに分解するので \mathcal{S} は箱玉系の散乱データの空間と思ってよい。実際以下に紹介するように、その時間発展や逆散乱写像にも頂点作用素を用いた自然な構成法が考案される。我々は $\mathcal{P} = \mathcal{S}$ をはじめ、未だ全ての主張の証明を完結できていないが、その考察が自然に誘う message

$$\text{フェルミ型公式} = \text{準粒子描像による箱玉系の分配関数}$$

を伝えるのが本稿の目的である。

3 Path の空間

記述の煩雑化を避けるため以下では $n = 1$ に限定する。これは最初に発見された箱玉系 [TS] に相当する。 $A_1^{(1)}$ の k 階対称テンソル表現のクリスタル $B_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 = k\}$ を考える。元 (x_1, x_2) は準標準盤 $\boxed{i_1 \dots i_k}$ で $i_1 = \dots = i_{x_1} = 1, i_{x_1+1} = \dots = i_k = 2$ に対応する。特に $k = 1$ の場合は $(1, 0) = 1, (0, 1) = 2, B_1 = \{1, 2\}$ と略記する。 B_1 は箱玉系の局所状態の集合であり、1 が空箱、2 は玉が一つ入った箱とみなす。箱玉系の状態空間とは

$$\mathcal{P} = \{p = b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \in B_1 \otimes B_1 \otimes \dots \mid b_j = 1(j \gg 1)\} \quad (1)$$

であり、 \mathcal{P} の元をパスと呼ぶ。このような境界条件の半無限テンソル積を許すとクリスタルのあるデータが発散してしまうが、そのことは以下の議論に影響しない。 \mathcal{P} には可換な時間発展 $T_k (k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ が以下の規則によって働く。

$$(k, 0) \otimes p = T_k(p) \otimes (k, 0) \quad (2)$$

ここで $=$ は組み合わせ $R: B_k \otimes B_1 = B_1 \otimes B_k$ を繰り返し適用することによって得られるクリスタルの同型 $B_k \otimes (B_1 \otimes B_1 \otimes \dots) = (B_1 \otimes B_1 \otimes \dots) \otimes B_k$ である。 $(k, 0) \in B_k$ は容量 k の空のキャリアであり、それが順次箱と R で局所相互作用しながら右に抜けていく。組み合わせ $R: B_l \otimes B_k \rightarrow B_k \otimes B_l$ は一般の k, l の場合に以下で与えられる。

$$\begin{aligned} R: (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) &\mapsto (x'_1, x'_2) \otimes (y'_1, y'_2) \\ x'_2 &= y_2 + \min(y_1, x_2) - \min(x_1, y_2), \quad x'_1 + x'_2 = k \\ y'_2 &= x_2 + \min(x_1, y_2) - \min(y_1, x_2), \quad y'_1 + y'_2 = l \end{aligned}$$

実は (2) の左辺を任意の元 $b \in B_k$ に関して $b \otimes p$ と置き換えたとしても、 \mathcal{P} の境界条件により、右辺は $p' \otimes (k, 0), p' \in \mathcal{S}$ の形となることが保証される。このことは 7 節で用いられる。 T_1 はどのような状態に対しても 2 を一斉に右に 1 だけずらす作用となる。 $T_{k \geq 2}$ の作用は一般にはそのように単純でない。例えば T_2, T_3, \dots による発展は同じ結果

$$\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \dots \end{array} \quad (3)$$

を与える。ここで第 2 行が第 1 行を時間発展させたものである。また、パス p を $b_1 b_2, \dots$ と略記した。パスのエネルギー $E: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下で定める。

$$E(p) = \sum_{i \geq 1} i \theta(b_i < b_{i+1}), \quad \theta(\text{true}) = 1, \theta(\text{false}) = 0 \quad (4)$$

(3) の例では第 1, 2 行のパスのエネルギーはそれぞれ 5, 8 である。可解格子模型の用語では、 E は角転送行列の「regime II 的な」固有値に相当し、保存量ではない。連続した j 個の 2 があって、 $\dots 11 \overbrace{2 \dots 2}^j 11 \dots$ のように十分多くの 1 に囲まれている場合、長さ j のソリトンが一つあると考える。この場合 $2 \dots 2$ の部分は T_k により $\min(j, k)$ だけ右に進む。長さ j のソリトンの個数を m_j とし、それを並べたデータ $m = (m_1, m_2, m_3, \dots)$ を soliton content と呼ぼう。十分大きな j については $m_j = 0$ である。Soliton content は任意の時間発展 T_k のもとに不変である事が知られている。従って一般に 2 が混みいつているパスでも十分時間発展させてソリトンに分離させることにより soliton content を読み取ることができる。より厳密には以下のようにすればよい。いま (2) の左辺 $(k, 0) \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes \dots$ に組み合わせ R

を $i - 1$ 回適用して $b'_1 \otimes \cdots \otimes b'_{i-1} \otimes c_i(k) \otimes b_i \otimes b_{i+1} \otimes \cdots$ の形まで持っていったとする。このとき $c_i(k) = (\alpha_i(k), \beta_i(k)) \in B_k$, $b_i = (u_i, v_i) \in B_1$ と書くと、 $p = b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots$ の soliton content $m = (m_1, m_2, m_3, \dots)$ は連立方程式

$$\sum_{i \geq 1} \min(k, i) m_i = E_k(p) := \sum_{i \geq 1} \min(\alpha_i(k), v_i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad (5)$$

の解として曖昧さなく定まる [HKOTY2]。ここで $E_k(p)$ は行転送行列 (時間発展) T_k に付随したエネルギーであり、 $E_k(T_j(p)) = E_k(p)$ が任意の j, k で成立する。(先に触れたように、このことから soliton content が時間発展で不変であることが従う。) これとは対照的に、角転送行列のエネルギー $E(p)$ は保存量ではなく、時間発展により

$$E(T_j(p)) = E(p) + E_j(p) \quad (6)$$

と変化する。パス $p = (b_1, b_2, \dots)$ のはじめの k 個に含まれる文字 i ($i = 1, 2$) の個数を $\#_i(b_1, \dots, b_k)$ と書く。 \mathcal{P} の部分集合

$$\mathcal{P}^+ = \{p = (b_1, b_2, \dots) \in \mathcal{P} \mid \#_1(b_1, \dots, b_k) \geq \#_2(b_1, \dots, b_k) \quad \forall k\} \quad (7)$$

の元を highest path という。表現論的には p が sl_2 部分代数についての最高ウェイト状態、即ち Kashiwara 作用素 \tilde{e}_1 により消されるものの集合であり、上記の具体的な条件は lattice permutation と呼ばれることもある。(3) では第 2 行だけが \mathcal{P}^+ の元である。一般に $p \in \mathcal{P}^+$ ならば $T_k(p) \in \mathcal{P}^+$ であるが、逆は成立しない。Soliton content $m = (m_1, m_2, \dots)$ を指定したパスの集合を導入しよう。

$$\mathcal{P}_L(m) = \{p = (b_1, b_2, \dots) \in \mathcal{P} \mid p \text{ の soliton content} = m, b_j = 1 \ (j > L)\} \quad (8)$$

$$\mathcal{P}_L^+(m) = \{p = (b_1, b_2, \dots) \in \mathcal{P}^+ \mid p \text{ の soliton content} = m, b_j = 1 \ (j > L)\} \quad (9)$$

ここで正整数 L はシステムの有効サイズである。 \mathcal{P} の任意の元 p に対してその soliton content が (5) により定まるので

$$\bigcup_m \mathcal{P}_\infty(m) = \mathcal{P} \quad (10)$$

が成り立つ。

我々の興味は soliton content を指定した分配関数にある。

$$Z_L(m) = \sum_{p \in \mathcal{P}_L(m)} q^{E(p)}, \quad Z_L^+(m) = \sum_{p \in \mathcal{P}_L^+(m)} q^{E(p)} \quad (11)$$

ここで q は不定元である。 L 有限ではこれら分配関数は正整数係数の q 多項式であり、 $L \rightarrow \infty$ の極限で、ある q 級数に (q -adic topology の意味で) 収束する。本稿の以下の内容は、 $Z_L^+(m)$, $Z_L(m)$ についての我々の予想 (43), (44) の背景の解説であると言っても良い。

例 1. Soliton content $m = (1, 0, 1, 0, 0, \dots)$ について $Z_L^+(m)$ は以下の寄与からなる。

$$\begin{aligned}
& \overbrace{1 \dots 1}^{j \geq 3} \overbrace{2221 \dots 1}^{k \geq 1} \dots 1 \quad q^{10} \begin{bmatrix} L-6 \\ 2 \end{bmatrix} \\
& \overbrace{121 \dots 1}^{k \geq 3} 22211 \dots \dots 1 \quad q^6 \begin{bmatrix} L-7 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \overbrace{1121 \dots 1}^{k \geq 2} 22211 \dots \dots 1 \quad q^7 \begin{bmatrix} L-7 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \overbrace{1 \dots 1}^{j \geq 3} \overbrace{21 \dots 1}^{k \geq 1} 2221 \dots 1 \quad q^8 \begin{bmatrix} L-6 \\ 2 \end{bmatrix} \\
& \overbrace{1 \dots 1}^{j \geq 3} 2212211 \dots \dots 1 \quad q^9 \frac{1 - q^{2L-14}}{1 - q^2}
\end{aligned}$$

各場合につき、並んでいる文字は全部で L 個と考える。最後の場合は長さ 2 のソリトンが二ついるわけではなく、長さ 3 と 1 のソリトンの衝突の最中であることを注意する。これらの和として

$$Z_L^+(m) = q^6 \begin{bmatrix} L-3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L-7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

を得る。ここで q 階乗と q -2 項係数の標準的な記号

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} = \frac{(q)_k}{(q)_j (q)_{k-j}}, \quad (q)_j = \prod_{i=1}^j (1 - q^i)$$

を用いた。

Soliton contents を指定しない場合には CTM 時代 (80 年代) の古い結果がある。

$$\sum_m Z_L(m) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix}, \quad \sum_m Z_L^+(m) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ s-1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、前者では $0 \leq s \leq L$ 、後者では $0 \leq s \leq L/2$ であり、和 \sum_m は分割 $\sum_{j \geq 1} j m_j = s$ を満たす全ての soliton content $m = (m_1, m_2, \dots)$ にわたる。後者は相殺のある符号入りの式で、ボゾン型の公式と呼ばれる。

4 Rigged Configuration

前述したように $A_1^{(1)}$ に話を限定する。以下の記述には、素直にはそのまま $A_n^{(1)}$ に持ち上がらない単純化がなされている部分があることをお断りしておく。正整数 L とヤング図 μ を固定する。通常とは逆順に $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_2, \mu_1)$ と書く。 μ_i は μ の下から i 行目の長さであり、 $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_l$ を満たす。 μ から $m = (m_1, m_2, \dots)$ を以下の規則で定める。

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l) = (\overbrace{1 \dots 1}^{m_1} \overbrace{2 \dots 2}^{m_2} \dots) \quad (14)$$

$k > \mu_l$ については $m_k = 0$ と了解する。今後 μ と m は常に (14) の関係にあるとする。また、ヤング図の升目の総数を

$$|\mu| = \sum_i \mu_i = |m| = \sum_{i \geq 1} im_i \quad (15)$$

と書く。組 (L, μ) が $L \geq 2|\mu|$ を満たすとき、configuration という。Configuration (L, μ) から

$$p_i = L - 2 \sum_{j \geq 1} \min(i, j) m_j \quad (16)$$

により定まる整数 p_1, p_2, \dots を vacancy という。定義により vacancy は $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0$ を満たす。ヤング図 μ の各行 (μ_i) に、 $0 \leq J_i \leq p_{\mu_i}$ を満たす整数 J_i (rigging という) を assign したものを Rigged Configuration (RC) という。但し、 μ において同じ長さの行が複数ある場合はそれらに assign する rigging を入れ替えたものは同一視する。別の言い方をすれば、(14) の状況では各 k について

$$0 \leq J_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} \leq J_{m_1+\dots+m_{k-1}+2} \leq \dots \leq J_{m_1+\dots+m_k} \leq p_k \quad (17)$$

に限定すると言ってもよい。Rigging を総称的に $J = (J_i)$ とあらわし、一つの rigged configuration を (L, μ, J) と書く。Configuration (L, μ) を持つ rigged configuration 全体の集合を $\text{RC}_L(\mu)$ とする。特に、 $\text{RC}_L(\emptyset) = \{(L, \emptyset, \emptyset)\}$ は1個の元からなる。また、 (L, μ) が configuration でない場合は $\text{RC}_L(\mu) = \emptyset$ と了解する。

例 2. $\text{RC}_8((2, 1, 1))$ の元は以下の6個からなる。

$$\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

ここでは $L = 8$ の情報は略した。 μ の各行の右側に rigging を添えて書いてある。また、 μ の長さ i の行からなるブロックには共通する vacancy p_i をブロックの左側中央に添え書きした。 $L = 8$ という情報はそのとき使われている。この例では $p_1 = 2, p_2 = 0$ である。Configuration (L, μ) が与えられた時、vacancy p_i の値は $L - 2(\mu$ で幅 i 以内の升目の数) と覚えればよい。(16) を見よ。

Rigged configuration (L, μ, J) のエネルギー E_{RC} を以下のように定義する。

$$E_{\text{RC}}((L, \mu, J)) = \sum_{i, j \geq 1} \min(i, j) m_i m_j + \sum_i J_i \quad (18)$$

例 2 の場合にその母関数を求めてみると

$$\sum_{\alpha \in \text{RC}_8((2, 1, 1))} q^{E_{\text{RC}}(\alpha)} = q^{10} (1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4) = q^{10} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

一般に

$$\sum_{0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq p} q^{j_1 + \dots + j_k} = \begin{bmatrix} p + k \\ k \end{bmatrix}$$

に注意すると

$$M_L(\mu) := \sum_{\alpha \in \text{RC}_L(\mu)} q^{E_{\text{RC}}(\alpha)} = q^{\phi(m)} \prod_{i \geq 1} \begin{bmatrix} p_i + m_i \\ m_i \end{bmatrix}, \quad \phi(m) := \sum_{i, j \geq 1} \min(i, j) m_i m_j \quad (20)$$

を得る。ここで、 μ と $m = (m_1, m_2, \dots)$ は (14) により関係している。

Bethe はハイゼンベルグ模型のベータ方程式の根の個数をストリング仮説を仮定して数えあげることにより、 $M_L(\mu)|_{q=1}$ を導いた。その際、 m_i とは「長さ i のストリングの本数」であった。この用語は以下に述べる KKR 理論でも踏襲されている。

5 Kerov-Kirillov-Reshetikhin(KKR) 全単射

正整数の組 $0 \leq 2s \leq L$ を固定する。Rigged configuration からパスへの全単射

$$\pi^* : \bigcup_{\mu (|\mu|=s)} \text{RC}_L(\mu) \longrightarrow \bigcup_{m (|m|=s)} \mathcal{P}_L^+(m) \quad (21)$$

を構成しよう。一般に、rigged configuration $(L, \mu, J) \in \text{RC}_L(\mu)$ において、rigging が施された μ の各行 $((\mu_i), J_i)$ を string と呼ぶ。Rigging J_i が許される最大値 p_{μ_i} に一致する場合、その string を singular であるという。例 2 の全ての rigged configuration は singular な行をもつ。そのうち最後のものは全ての行が singular になっている。 L の情報は vacancy の値に影響し、singular か否かの判定を左右するのでしばらく $p_i(L)$ と書くことにする。Rigged configuration の持つ情報のうち、 L 以外の部分は string の集合 $\{((\mu_1), J_1), ((\mu_2), J_2), \dots\}$ というデータ (多重度つき) と同等である。これらを例 2 のような図にするやり方は一意的であるから。

Rigged configuration のランクを

$$\text{Rigged configuration のランク} = \begin{cases} 2 & \text{singular string が存在する場合} \\ 1 & \text{singular string が存在しない場合} \end{cases}$$

と定義する。特に $(L, \emptyset, \emptyset) \in \text{RC}_L(\emptyset)$ のランクは 1 である。

与えられた rigged configuration $(L, \mu, J) \in \text{RC}_L(\mu)$ から以下の手続きにより新しい rigged configuration $(L-1, \mu', J') \in \text{RC}_{L-1}(\mu')$ をつくる。

- (L, μ, J) のランクが 1 の場合、 $\mu' = \mu, J' = J$ とする。
- (L, μ, J) のランクが 2 の場合、singular string が少なくとも一つ存在している。その中でも最も短いものの一つを $((\mu_i), J_i)$ とせよ。最短の singular string が複数ある場合はどれを選んでもよい。このストリングだけを $((\mu_i - 1), p_{\mu_i - 1}(L - 1))$ と変更する。即ち、一つ短くし、新たな環境のもとで singular となる rigging を割り振る。 i 番目のみの変更を受けた string の集合 $\{\dots, ((\mu_{i-1}), J_{i-1}), ((\mu_i - 1), p_{\mu_i - 1}(L - 1)), ((\mu_{i+1}), J_{i+1}), \dots\}$ と同等なデータを (μ', J') とする。特に $\mu_i = 1$ の場合は単に singular string $((\mu_i), J_i)$ を捨て去る。

$(L-1, \mu', J')$ が実際に $\text{RC}_{L-1}(\mu')$ の元になることを示すのは難しくない。以上の手続きを

$$(L, \mu, J) \xrightarrow{r} (L-1, \mu', J') \quad (L, \mu, J) \text{ (のランクが } r \text{ のとき)} \quad (22)$$

と表す。任意の rigged configuration $\alpha = (L, \mu, J) \in \text{RC}_L(\mu)$ はこの「けずる」操作を繰り返すと $(0, \emptyset, \emptyset)$ に行き着く。その過程

$$\alpha \xrightarrow{r_1} \alpha^{(1)} \xrightarrow{r_2} \dots \xrightarrow{r_{L-1}} \alpha^{(L-1)} \xrightarrow{r_L} (0, \emptyset, \emptyset)$$

から π^* を

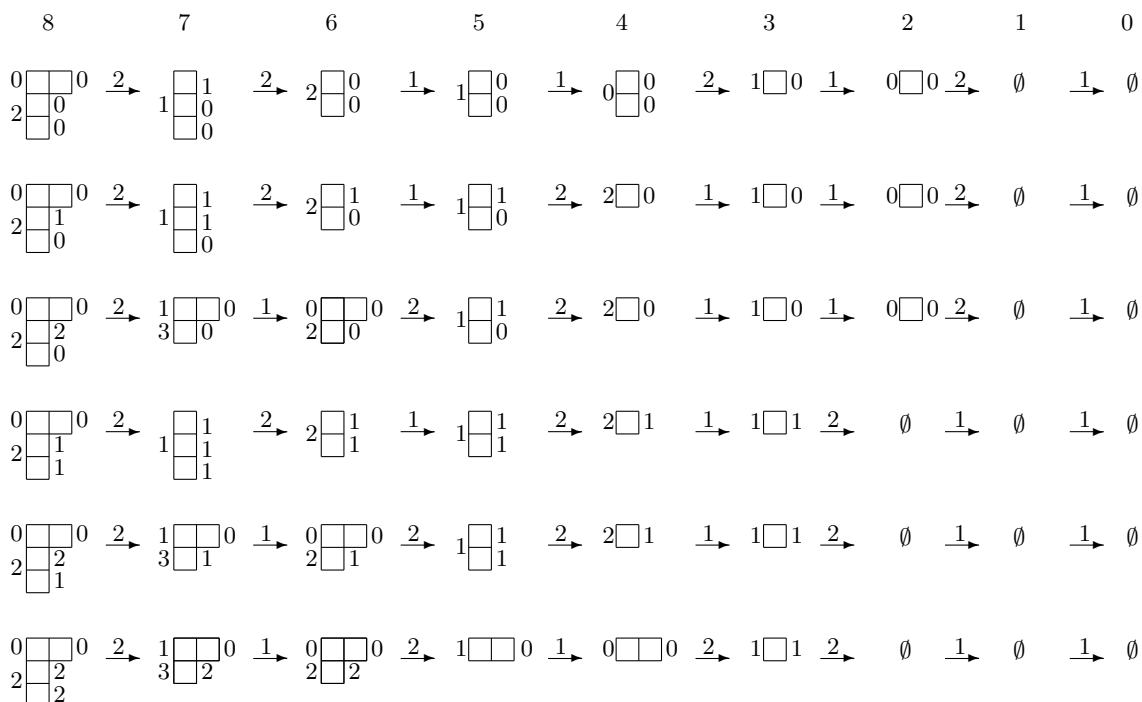
$$\pi^*(\alpha) = (r_L, r_{L-1}, \dots, r_2, r_1, 1, 1, 1, \dots)$$

により定義する。実は π^* は \mathcal{P}^+ へのマップになることが知られている。より精密には以下の定理が成立する。

定理 3 ([KR, KKR]). π^* (21) は全単射であり、エネルギーを intertwine する。即ち $E_{RC} = E \circ \pi^*$.

実際には [KR] では、rigged configuration とヤング標準盤 (Q -symbol) への全単射が構成された。上記の定理では insertion によるヤング標準盤とパスとの対応 [NY] を合成してある。

例 4. 例 2 の 6 個の rigged configuration について上記の操作を適用して得られる過程を示す。



ここで、 L の値を上にとした。これらの過程から π^* による像として、以下のパスが得られる。

π^* による Image	E
1 2 1 2 1 1 2 2	10
1 2 1 1 2 1 2 2	11
1 2 1 1 2 2 1 2	12
1 1 2 1 2 1 2 2	12
1 1 2 1 2 2 1 2	13
1 1 2 2 1 2 1 2	14

ここで、これらのパスの右側に続く $11\dots$ は略した。パスのエネルギー $E(4)$ も与えておいた。それらは (19) に現れた E_{RC} と一致している。これらのパスは皆 \mathcal{P}^+ の元であることも確認できる。 $L = 8, s = 4$ の場合に (21) が 1:1 写像であることを確認するには更に $RC_8((4)), RC_8((3, 1)), RC_8((2, 2)), RC_8((1, 1, 1, 1))$ に関して π^* を求めればよい。これは読者におまかせしよう。この例が大きすぎると思われる方には $L = 5, s = 2$ くらいがお勧めである。

KKR 全単射 π^* の逆写像 π_* は「付け加える」操作により同様に定式化できる。パスを左から順に読む事により、ランクの列が得られているとしてよい。Rigged configuration $(0, \emptyset, \emptyset)$ から出発し、ランク r が与えられた状況で (22) の逆をたどるには、 $r = 1$ なら L を一つ増やすだけである。 $r = 2$ の場合は、 $(L - 1, \mu', J')$ 内の singular string で最長のものを一つ長くし、singular となるよう rigging を割り振ればよい。もし singular string がない場合は、新たに長さ 1 の行を創設して singular となる rigging を与える。以下では π^* も π_* も KKR 全単射と呼ぶ。

実に巧くできている。しかし、なんてミステリアスな構成であろうか。我々の動機のひとつはこれを表現論的に理解することである。

系 5.

$$\sum_{m \ (|m|=s)} Z_L^+(m) = \sum_{\mu \ (|\mu|=s)} M_L(\mu)$$

これが sl_2 の最も簡単な場合のフェルミ型公式であり、左辺が X , 右辺が M のことである。Bethe が 1931 年に証明したのはこの式で $q = 1$ の場合である。キャンセルを含む符号付きの式を許すのであれば、(13) に注意したように単純な明示公式もある。系 5 の両辺は Kostka 多項式 $K_{\lambda, \nu}(q)$ で q を q^{-1} に置き換えたもの

$$q^{\frac{L(L-1)}{2}} K_{\lambda, \nu}(q^{-1}), \quad \lambda = (L - s, s), \quad \nu = (1^L) \quad (23)$$

に等しい。Macdonald の本 [Ma] の 245 ページには、一般の $K_{\lambda, \nu}(q)$ に対するフェルミ型公式 [KR] が Examples として引用されている。(ただしそこでの $\alpha_n^{(kH)}$ は誤植で、正しくは $\alpha_{n+1}^{(k)}$ である。) (23) の一つの表現論的な意味は sl_2 のスピン 1/2 表現の L 個のテンソル積におけるスピン $L/2 - s$ の既約表現の多重度の q アナログである。

6 散乱データとアフィン・クリスタル

この節では散乱データの空間を定義し、その部分空間が rigged configuration と 1:1 対応することを注意する。箱玉系の「散乱データ」であるということの意味は次節で説明する。

$B'_k (\subset B_k)$ をただ一つの元 $\overbrace{[22\dots 2]}^k$ からなる“ sl_1 の k 階対称表現のクリスタル”とする。この元を単に k とかき、アフィン・クリスタル $\text{Aff}(B'_k) = \{k[d] \mid d \in \mathbb{Z}\}$ を導入する。本来 $[2\dots 2][d]$ 、あるいは $(k)[d]$ などと書くべきところだが、今後正整数が $[\]$ つきで現れたらこの意味であると了解する。 $\text{Aff}(B'_k)$ のテンソル積にはアフィン・クリスタルの同型 S が働く。

$$\begin{aligned} S : \text{Aff}(B'_k) \otimes \text{Aff}(B'_{k'}) &\simeq \text{Aff}(B'_{k'}) \otimes \text{Aff}(B'_k) \\ k[d] \otimes k'[d'] &\mapsto k'[d' - \min(k, k')] \otimes k[d + \min(k, k')] \quad \text{for } k \neq k' \\ k[d] \otimes k[d'] &\mapsto k[d] \otimes k[d'] \quad \text{for } k = k' \end{aligned} \quad (24)$$

$k[d]$ は長さ k のソリトンが位相 (位置) d の状態にあることを表し、上記の S はソリトンの散乱行列に対応する。今後単に S 行列とよぶ。 S が Yang-Baxter 方程式を満たすことはすぐ確認できる。散乱

データの空間 \mathcal{S} を導入しよう。

$$\mathcal{S}/\mathcal{S} = \bigcup_m \mathcal{S}(m) \quad (25)$$

$$\mathcal{S}(m) = \mathcal{S}^{(1)}(m) \otimes \mathcal{S}^{(2)}(m) \otimes \cdots \quad (26)$$

$$\mathcal{S}^{(k)}(m) = \{k[d_1] \otimes \cdots \otimes k[d_{m_k}] \mid r_{k-1} \leq d_1 \stackrel{k}{<} \cdots \stackrel{k}{<} d_{m_k}\} \quad (27)$$

$$r_k = m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k \quad (28)$$

説明を補足する。(25)における和集合 \bigcup_m は $m = (m_1, m_2, \dots)$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $|m| < \infty$ となるもの全体についてとる。散乱データの空間 \mathcal{S} にはアフィン・クリスタルの同型 (S 行列) (24) が働き、その作用により写りあう元は同一視する。(25)が \mathcal{S} の定義という意味は、 S -orbit の代表元として (26) の形のものをとった時、(27) の条件をみたまの全体ということである。条件 $|m| < \infty$ により、(26) は有限のテンソル積である。また、(27) において $d \stackrel{k}{<} d' \stackrel{\text{def}}{\iff} d + k \leq d'$ という記号を用いた。(27) に入っている不等式の条件が 2 節で触れた排他条件 (exclusion condition) である。

散乱データに関して、標準形、対正順、正規順序を定義する。

$$k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S} \text{ が} \\ \text{標準形である} \stackrel{\text{def}}{\iff} k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S}^{(\exists m)} \quad (29)$$

$$\text{対正順である} \stackrel{\text{def}}{\iff} d_{i+1} - d_i \geq \min(k_i, k_{i+1}) \text{ for } 1 \leq i \leq l-1 \quad (30)$$

与えられた散乱データの標準形は一意的に存在することは明らか。それに対し、対正順な表示は一意的でない。(30)で等号が成立する場合、たとえば $2[1] \otimes 3[3] = 3[1] \otimes 2[3]$ はともに対正順である。

散乱データの正規順序を、標準形 $k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S}$ から出発して帰納的に以下のように定義する。 $l=1$ のとき、任意の $k_l[d_l] \in \mathcal{S}$ は正規順序であると定める。 $l>1$ で、 $k_{i+1}[d_{i+1}] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S}$ が正規順序であるとする。このとき $k_i[d_i] \otimes k_{i+1}[d_{i+1}] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]$ に S 行列 (24) を順次適用して $k_{i+1}[d'_{i+1}] \otimes \cdots \otimes k_j[d'_j] \otimes k_i[d'_i] \otimes k_{j+1}[d_{j+1}] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]$ の形に並べ替える ($i \leq j \leq l$)。そのような並べ方のうち、対正順となる最小の j をとったものを $k_i[d'_i] \otimes k_{i+1}[d_{i+1}] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]$ の正規順序とする。この並べ替えを $j = l-1, l-2, \dots, 1$ と繰り返し適用した結果を $k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S}$ の正規順序とする。標準形の定義と (24) から、任意の散乱データには正規順序が一意的に存在することがわかる。正規順序ならば対正順である。

例 6.

$$\begin{aligned} & 1[15] \otimes 2[5] \otimes 3[4] \otimes \underline{3[9]} \otimes 4[10] \\ & = 1[15] \otimes \underline{2[5]} \otimes 3[4] \otimes 4[7] \otimes 3[12] \\ & = \underline{1[15]} \otimes 3[2] \otimes 4[5] \otimes 2[9] \otimes 3[12] \\ & = 3[1] \otimes 4[4] \otimes 2[8] \otimes 3[11] \otimes 1[19] \end{aligned}$$

1 行目は標準形である。 S 行列の作用による変形の各ステップで、上の説明の $k_i[d_i]$ に相当するものにアンダーラインをつけた。最後のものが正規順序である。

標準形、対正順、正規順序と限らない散乱データ $k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l] \in \mathcal{S}$ が与えられた時、 $m_i = \#\{j \mid k_j = i\}$, $m = (m_1, m_2, \dots)$ とおく。この時、散乱データのエネルギーを

$$E_{\text{SD}}(k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]) = \sum_{i=1}^l d_i + \frac{\phi(m) - |m|}{2} \quad (\in \mathbb{Z}) \quad (31)$$

と定義する。ただし $\phi(m)$ は (20) で、 $|m|$ は (15) で与えられる。 E_{SD} は S 行列 (24) のもとに不変であることは容易にわかる。

次に散乱データの空間 S の中で Rigged configuration と 1:1 対応する部分集合 $S_L^+ \subset S$ を導入する。

$$S_L^+/S = \bigcup_m S_L^+(m) \quad (32)$$

$$S_L^+(m) = S_L^{(1)+}(m) \otimes S_L^{(2)+}(m) \otimes \cdots \quad (33)$$

$$S_L^{(k)+}(m) = \{k[d_1] \otimes \cdots \otimes k[d_{m_k}] \mid r_{k-1} + k \leq d_1 \stackrel{k}{<} \cdots \stackrel{k}{<} d_{m_k} \leq r_k + p_k\} \quad (34)$$

ただし、 p_k は m と L から (16) により定義されるものである。明らかに $S_L^+(m) \subset S(m)$ が成立する。いま、 $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_l$ であり、 μ と m が (14) の関係にあるとする。写像 ρ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \rho : \text{RC}_L(\mu) &\longrightarrow S_L^+(m) \\ \{((\mu_i), J_i)\}_{i=1}^l &\longmapsto \mu_1[J_1 + \xi_1] \otimes \cdots \otimes \mu_l[J_l + \xi_l] \end{aligned}$$

ただし $\xi_i = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$ である。

命題 7. ρ は全単射であり、エネルギーを intertwine する。即ち $E_{\text{RC}} = E_{\text{SD}} \circ \rho$ 。

証明 $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_l$ により $\mu_1[J_1 + \xi_1] \otimes \cdots \otimes \mu_l[J_l + \xi_l]$ は標準形であることに注意すると、それに対する条件 (33)–(34) は $\{J_i\}$ に関する条件 (17) と同値である。エネルギーに関しては、(31) に $d_i = J_i + \xi_i$ を代入して $\sum_i \xi_i = \frac{\phi(m) + |m|}{2}$ を用いれば (18) を得る。□

写像 ρ は図で考えるとわかり易い。Rigged configuration において rigging つきのヤング図を行、即ち string $((\mu_i), J_j)$ に分解し、おのおのを $\mu_i[J_i + \xi_i] \in \text{Aff}(B'_{\mu_i})$ と思って短い string が左に来るようにテンソル積をとる。その際散乱データのモード $J_i + \xi_i$ とは rigging J_i に自分以下の升目の総数 ξ_i を加えたものである。

例 8. 例 2 にある $\text{RC}_8((2, 1, 1))$ の 6 個の元の ρ による像は順番に以下のとおり。

$$\begin{aligned} 1[1] \otimes 1[2] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 10 \\ 1[1] \otimes 1[3] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 11 \\ 1[1] \otimes 1[4] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 12 \\ 1[2] \otimes 1[3] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 12 \\ 1[2] \otimes 1[4] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 13 \\ 1[3] \otimes 1[4] \otimes 2[4] & E_{\text{SD}} = 14 \end{aligned}$$

これらはみな標準形である。 $r_0 = 0, r_1 = 2, r_2 = 4, p_1 = 2, p_2 = 0$ であり、条件 (34) を満たすものはこれらで尽くされる。また、 $\frac{\phi(m) - |m|}{2} = 3$ に注意して、エネルギー (31) の値も併記した。(19) に現れている rigged configuration のエネルギーと一致することが確認できる。

7 箱玉頂点作用素と逆散乱写像

散乱データを用いて箱玉系にソリトンを作り出す。 $(0, k) \in B_k$ に付随して、パスに働くオペレーター Φ_k を以下で定義する。

$$\begin{aligned}\Phi_k : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ p &\longmapsto p'\end{aligned}$$

ここで、 p' は同型 $B_k \otimes (B_1 \otimes B_1 \otimes \cdots) = (B_1 \otimes B_1 \otimes \cdots) \otimes B_k$ のもとでの対応

$$(0, k) \otimes p = p' \otimes (k, 0)$$

により定まる元である。時間発展 (2) と比較されたい。 $p_{\text{vac}} = (1, 1, \dots) \in \mathcal{P}$ を 2 が一つも無いパスとする。任意の散乱データ $x \in \mathcal{S}$ に対して、その正規順序による表示を $x = k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ x &\longmapsto T_1^{d_1} \Phi_{k_1} T_1^{d_2-d_1} \Phi_{k_2} \cdots T_1^{d_l-d_{l-1}} \Phi_{k_l} (p_{\text{vac}})\end{aligned}\tag{35}$$

により定義される写像 Φ を箱玉頂点作用素と呼ぼう。

例 9.

$$\begin{aligned}\Phi(2[1] \otimes 3[3]) &= (12211222111 \dots) \\ \Phi(2[2] \otimes 3[3] \otimes 4[5]) &= (22221122111222111 \dots) \\ \Phi(\text{例 6 の散乱データ}) &= (122211122211222111122212111 \dots) \\ \Phi(\text{例 8 の散乱データ}) &= (\text{例 4 の最後にあるパス})\end{aligned}$$

これらの例で右辺のパスの soliton content $m = (m_1, m_2, \dots)$ を調べてみると、左辺の散乱データを $k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]$ とした場合 $m_i = \#\{j \mid k_j = i\}$ となっていることが確かめられる。つまり、 $\{k_1, \dots, k_l\}$ はソリトンの長さのリストになっている。このことは一般的に成立する。

命題 10. 任意の soliton content m について $\Phi(\mathcal{S}(m)) \subseteq \mathcal{P}_\infty(m)$.

証明は $p \in \mathcal{S}(m)$ について $E_k(\Phi(p)) = \sum_i \min(k, i) m_i$ を示せばよい。(5) を参照のこと。詳細は技術的なので割愛するが、それによれば以下の性質があることも示せる。

補題 11. (35) において、パス $\Phi_{k_j} T_1^{d_{j+1}-d_j} \cdots T_1^{d_l-d_{l-1}} \Phi_{k_l} (p_{\text{vac}})$ には長さ k_j, \dots, k_l のソリトンがいる。つまり soliton content $m = (m_i)$ は $m_i = \#\{t \mid k_t = i, j \leq t \leq l\}$ で与えられる。

実際には命題 10 より更に強く以下の主張を期待している。

予想 12. $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$ は全単射。特に任意の soliton content $m = (m_1, m_2, \dots)$ について $\Phi(\mathcal{S}(m)) = \mathcal{P}_\infty(m)$.

命題 13. Φ は散乱データとパスのエネルギーを intertwine する。即ち $E \circ \Phi = E_{\text{SD}}$.

証明 (35) において、中間段階のパスを $r_j = \Phi_{k_{j+1}} \cdots T_1^{d_l - d_{l-1}} \Phi_{k_l}(p_{\text{vac}})$, $s_j = T_1^{d_{j+1} - d_j}(r_j)$ と名づける。このとき

$$E(s_j) - E(r_j) = (l - j)(d_{j+1} - d_j) \quad (36)$$

$$E(\Phi_{k_j}(s_j)) - E(s_j) = \sum_{i=j+1}^l \min(k_i, k_j) \quad (37)$$

を示す。 $E(p_{\text{vac}}) = 0$ と (36), (37) から $E(\Phi(x))$ が (31) の右辺に一致することはすぐに確かめられる。以下の議論では補題 11 をことわり無く用いる。まず (36) は、 r_j の中に丁度 $l - j$ 個のソリトンがいる

ことと (6) から従う。次に (37) を示そう。 s_j の左端に 2 を k_j 個つけ加えたパス $s'_j = \overbrace{2 \otimes \cdots \otimes 2}^{k_j} \otimes s_j$ を導入する。このとき

$$T_{k_j}(s'_j) = \overbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}^{k_j} \otimes \Phi_{k_j}(s_j) \quad (38)$$

となる事は容易にわかる。従って

$$E(T_{k_j}(s'_j)) = E(\Phi_{k_j}(s_j)) + (l - j + 1)k_j \quad (39)$$

が成立する。ここで、 s_j と r_j の soliton content は同じなので s_j には $l - j$ 個のソリトンがいる事と、パス $\Phi_{k_j}(s_j)$ の左端の成分は 2 であることを用いた。また、

$$E(s'_j) = E(s_j) + (l - j)k_j \quad (40)$$

であることは明らか。(39), (40), (6) から

$$\begin{aligned} E(\Phi_{k_j}(s_j)) - E(s_j) &= E(T_{k_j}(s'_j)) - E(s'_j) - k_j \\ &= E_{k_j}(s'_j) - k_j \end{aligned}$$

となる。(38) において、時間発展により soliton content は不変であることから、 s'_j は $\Phi_{k_j}(s_j)$ と同じく長さ k_j, \dots, k_l のソリトンを持つ。従って (5) により $E_{k_j}(s'_j) = \sum_{i=j}^l \min(k_i, k_j)$ であることが判り、(37) が示された。□

散乱データの時間発展 $T_j : S \rightarrow S$ ($j = 1, 2, \dots$) を

$$T_j(k_1[d_1] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l]) = k_1[d_1 + \min(j, k_1)] \otimes \cdots \otimes k_l[d_l + \min(j, k_l)] \quad (41)$$

により定める。右辺が確かに S の元であることや、 S 行列の作用との整合性 (可換性) は明らかである。パスの時間発展の T_j と同じ記号をあえて用いたのは次の予想にもとづく。

予想 14. $T_j \circ \Phi = \Phi \circ T_j$.

つまり散乱データの空間は、時間発展 (41) のもとに箱玉系と同等な離散力学系である。そこでは時間発展が線形化されている。即ち、散乱データのうち $\{k_1, \dots, k_l\}$ の部分は時間発展により不変に保たれる作用変数であり、モード部分 $\{d_1, \dots, d_l\}$ は角変数に他ならない。頂点作用素 Φ は逆散乱写像である。

例 15. 時間発展 T_2 のもとでの散乱データとパスの変化。 (T_3, T_4, \dots でも同じ。)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}(\text{標準形}) & \text{正規順序} & \mathcal{P} \\
 1[2] \otimes 1[3] \otimes 2[2] = 2[0] \otimes 1[3] \otimes 1[4] & \xrightarrow{\Phi} & 2211212111111 \dots \\
 1[3] \otimes 1[4] \otimes 2[4] = 2[2] \otimes 1[4] \otimes 1[5] & \mapsto & 1122121211111 \dots \\
 1[4] \otimes 1[5] \otimes 2[6] = 1[4] \otimes 1[5] \otimes 2[6] & \mapsto & 1111212122111 \dots
 \end{array}$$

ここで、第 2 行は例 4 および例 8 における最後のものである。

8 箱玉分配関数

逆散乱法により初期値問題を解くには順散乱問題 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ の解も必要である。Highest path の集合 \mathcal{P}^+ (7) に話を限定すれば、これは 5 節で説明した KKR 全単射 π_* と 6 節の写像 ρ を合成することにより得られる。

予想 16. 以下の可換図が成立。写像はすべて全単射でエネルギー E, E_{RC}, E_{SD} を intertwine する。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_L^+(m) & \xleftrightarrow{\pi_*} & \text{RC}_L(\mu) \\
 & \xleftarrow{\pi^*} & \downarrow \rho \\
 & \searrow \Phi & \mathcal{S}_L^+(m)
 \end{array}$$

$\mathcal{P}_L^+(m)$ と $\text{RC}_L(\mu)$ の 1:1 対応は定理 3 ((21) も参照) の精密化になっている。それ以外では図の可換性が予想である。エネルギーの一致は定理 3、命題 7、命題 13 により既に示されている。例 9 で既に注意したように、例 8 の散乱データが頂点作用素 Φ により例 4 のパスにマップされることは上の図の可換性の例である。

予想 16 のもとに、highest path に関しては、箱玉系の逆散乱法による初期値問題の解は

$$T_j(p) = \Phi(T_j((\rho \circ \pi_*)(p))) \quad (42)$$

と定式化することができる。 $\rho \circ \pi_*$ が順散乱であり、 Φ が逆散乱である。要約すると、単純な読みかえである ρ を介すれば、ミステリアスな KKR 理論に以下の解釈を得る。

KKR 理論	箱玉系	クリスタル
Rigged Configuration	散乱データ (作用・角変数)	$\text{Aff}(B'_{k_1}) \otimes \dots \otimes \text{Aff}(B'_{k_l})$
KKR 全単射 π^*	逆散乱写像	頂点作用素 Φ

予想 16 のもう一つの帰結は soliton content を指定した分配関数 $Z_L^+(m)$ (11) の明示公式である。定義 (20) に注意すれば

$$Z_L^+(m) = M_L(\mu) \quad (43)$$

を得る。右側の定義については (20) と (14) を見よ。これは系 5 の精密化であり、フェルミ型公式の和の変数 m_i に soliton content という意味を与えている。例 1 の $Z_L^+(m = (1, 0, 1, 0, 0 \dots))$ の結果 (12) は

確かに $M_L(\mu = (3, 1))$ に一致している。(14), (20) を参照のこと。特に有効サイズ $L \rightarrow \infty$ の極限では

$$Z_\infty^+(m) = \frac{q^{\phi(m)}}{\prod_i (q)_{m_i}}$$

となる。

9 むすび

最後の 8 節では highest path の場合に話が限定されて、戻つぼみになってしまったが、実は一般の \mathcal{P} の元に関しても少なくとも sl_2 の場合には、KKR 理論を自然に拡張できる事がごく最近判明した。即ち \mathcal{P} と拡張された Rigged configuration の間に π^*, π_* に類似のエネルギーを intertwine する全単射が構成され、予想 16 はより一般的な予想の highest に対応するサブケースとなる。一般化された予想の帰結する $Z_L(m)$ のフェルミ型公式は

$$Z_L(m) = q^{\phi(m)-|m|} \prod_{i \geq 1} \begin{bmatrix} p_i + m_i + i \\ m_i \end{bmatrix} \quad (44)$$

である。これらの結果についてはまた別の機会に報告したい。

もともと KKR 理論は XXX タイプのスピンの鎖、即ちアフィン量子群で変形パラメータ p が 1 の極限 (Yangian) に付随する可解格子模型の研究から生まれた。(本稿の q とは意味が違うので p と書く。) そこでのベ-テ方程式は rational である。一般の p に対応する XXZ タイプのスピンの鎖ではベ-テ方程式は trigonometric である。その根の個数を重根罪を避けながら数えあげることが一般に極めて困難である。しかし $p = 1$ 以外にも少なくとも $p = 0$ では系統的な結果 [KN] が存在する。興味深いことに、そこでの数え上げの明示公式 $R(\nu, m)$ を、箱の容量が全て 1 に相当する場合 (スピン 1/2) に特殊化すると周期的箱玉系の状態数 [YYT] に一致する。

本稿の内容の背景としては 1 節で述べたもののほかに文献 [HKOTT] の Appendix B に収録されたフェルミ型公式の極限や、文献 [NY2] による反強磁性領域での準粒子描像の研究がある。A 型以外の非例外型のアフィン・リー環 \mathfrak{g}_n のクリスタルに付随した箱玉系にも同様の特徴がある。即ちソリトンは \mathfrak{g}_{n-1} のクリスタルでラベルされ [HKT]、その散乱は組み合わせ R で特徴付けられる [HKOTY2]。これまで Haldane らの意味での排他統計 [H] に従う系として様々な模型が提唱されてきたが、箱玉系はいわば排他条件の「目に見える実空間での実現」と考えられる点でも興味深い。逆散乱法による初期値問題の解 (42) が何処まで実質的な明示公式になりうるか、それは幾何クリスタルやトロピカル R の研究 [KOTY] と関連する今後の課題である。

(2002 年 11 月 22 日提出)

参考文献

- [B] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London (1982).
- [Be] H. A. Bethe, *Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Physik **71** (1931) 205–231.
- [DJKMO] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, *Exactly solvable SOS models II: Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities*, Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988) 17–122,

- _____, *One dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters*, Lett. Math. Phys. **17** (1989) 69–77.
- [FOY] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, *Energy functions in box ball systems*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1379–1392.
- [H] F. D. M. Haldane, “*Fractional statistics*” in arbitrary dimensions: a generalization of the Pauli principle, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 937–940.
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, *The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors*, J. Math. Phys. **42** (2001) 274–308. (math.QA/9912209)
- [HKT] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, *Soliton cellular automata associated with crystal bases*, Nucl. Phys. **B577**[PM] (2000) 619–645 (solv-int/9907020),
_____, *Simple Algorithm for Factorized Dynamics of \mathfrak{g}_n -Automaton*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10697-10705. (nlin.CG/0103022)
- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, Crystals and Fermionic Formulae*, Prog. in Math. Phys. *MathPhys Odyssey 2001, Integrable Models and Beyond*, M. Kashiwara and T. Miwa eds. Birkhäuser (2002) 205–272 (math.QA/0102113)
- [HKOTY1] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Contemporary Math. **248** (AMS 1999) 243–291. (math.QA/9812022)
- [HKOTY2] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases*, Contemporary Math. **297** (AMS 2002) 151-182. (math.QA/0007175)
- [KMN] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (suppl. 1A), (1992) 449–484.
- [Ka] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991) 465–516.
- [KKR] S.V.Kerov, A.N.Kirillov and N.Yu.Reshetikhin, *Combinatorics, Bethe ansatz, and representations of the symmetric group*, Zap. Nauch. Semin. LOMI. **155** (1986) 50-64.
- [KN] A. Kuniba and T. Nakanishi, *The Bethe equation at $q = 0$, the Möbius inversion formula, and weight multiplicities: I. The $sl(2)$ case*, Prog. in Math. **191** (2000) 185-216. (math.QA/9909056)
- [KR] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux*, J. Sov. Math. **41** (1988) 925–955.
- [KSS] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, *A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations*, math.CO/9901037.
- [KMOTU] A. Kuniba, K. C. Misra, M. Okado, T. Takagi and J. Uchiyama, *Characters of Demazure modules and solvable lattice models*, Nucl. Phys. **B510** [PM] (1998) 555–576.

- [KOTY] A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada: *Geometric crystal and tropical R for $D_n^{(1)}$* , math.QA/0208239.
- [Ma] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, New York (1995).
- [M] B.M. McCoy, *Quasi-particles and the generalized Rogers-Ramanujan identities*, XIIth International Congress of Mathematical Physics (ICMP '97) (Brisbane), Internat. Press, Cambridge, MA (1999) 350–356.
- [NY] A. Nakayashiki and Y. Yamada, *Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models*, Selecta Mathematica, New Ser. **3** (1997) 547–599.
- [NY2] A. Nakayashiki and Y. Yamada, *Crystallizing the spinon basis*, Commun. Math. Phys. **178** (1996) 179–200.
- [OSS] M. Okado, A. Schilling and M. Shimozono, *Virtual crystals and fermionic formulas of type $D_{n+1}^{(2)}$, $A_{2n}^{(2)}$ and $C_n^{(1)}$* , math.QA/0105017.
- [T] D. Takahashi, *On some soliton systems defined by using boxes and balls*, Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA '93), (1993) 555–558.
- [TS] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.
- [YYT] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, *Fundamental cycle of a periodic box-ball system*, nlin.SI/0208042.