

# Matrix products in integrable probability

国場敦夫 (東京大学 大学院総合文化研究科)

## 1. 序論

行列積 (Matrix products) の方法は、統計力学、量子多体系における分配関数や基底状態を精度良く評価する試みに背景を持つ。スピン等のミクロな自由度に扱い易い行列を割り当てた行列積状態を仮設し、それを試行関数として変分法を適用する。こうしたアプローチは角転送行列法 [3, 13 章] や密度行列繰り込み群 [47] として整備され、大きな成果を収めた。最近ではテンソルネットワーク形式としてより高次元の系に拡張され、計算機科学の強力な手法に発展すると共に、量子重力やエンタングルメントエントロピーとの関係等にも理論的興味を持たれている。

可積分確率過程 (Integrable probability) は、主として非平衡統計力学の確率的動力学模型に Yang-Baxter 方程式や Bethe ansatz といった量子可積分系的手法を応用した研究である。代表的な模型として 1 次元の非対称排他過程や零レンジ過程等の Markov 過程がある。平衡系の可解格子模型の理論と並行して 90 年代から徐々に研究が活性化し、近年はランダム行列や確率微分方程式等と結びついて著しい展開を見せている [40]。広い意味の確率解析と捉えれば、今世紀少なくとも 3 つの Fields 賞と 2 つの Poincaré 賞に繋がっている流れと言える。

量子可積分系と Markov 過程の模型の接点を模索するならば、次の問いに導かれる。

量子  $R$  行列を stochastic に整形できるか？

量子  $R$  行列とは Yang-Baxter 方程式 (YBE) の解の総称であり、量子群発見の契機となった歴史は周知の通りである [24]。「YBE の解から可換な転送行列が構成される」というシナリオは、Baxter による 8 頂点模型の厳密解 [2] という象徴的出来事以来、可解格子模型の理論における central dogma となっている。可積分性は可換性に具現化され、可換性は固有値の解析性に伝搬し、Bethe ansatz 等による詳細な記述を可能にしてゆく。この様な性質を備えた転送行列を非平衡系にも輸出して Markov 行列と見なせる状況を実現したい。一方後者は確率解釈の為の非負性や全確率保存条件を求めてくる。そうした要請を構成要素の量子  $R$  行列に還元したものが上の問いである。

Integrable probability はほぼ四半世紀の歴史を通じて上の問いに対する yes の例、「stochastic  $R$  行列」と呼ぶ、を個別に積み上げて来たが、量子群の表現論に立脚した一般論は未だ存在しない。一方昨年 (2016)、既存の例をほぼ網羅する stochastic  $R$  行列が構成された [29]。元になる量子  $R$  行列は量子群では初等的に良く知られた例であるが、stochastic に整形する段階に新規な様相を含む。付随する Markov 過程は多種粒子からなる非対称排他過程や零レンジ過程として記述され、その退化は先行研究の多くの模型を含む。その詳細は鳥瞰図 [27, Fig.1,2] が見易い。2 節では [29] で得られた stochastic  $R$  行列、3 節では付随する Markov 過程の概要を述べる。

Markov 過程において平衡系の基底状態に準ずるものは定常状態である。離散時間マスター方程式の既約な Markov 行列  $T$  に対し、 $T-1$  の核は 1 次元であり、定常状態という。また定常状態の成分で、総和が 1 に規格化されたものを定常確率という。定義から、定常確率は algebraic (ここでは  $T$  の成分の有理関数の意) である。一方  $T$  が量子可積分系から来る転送行列ならば、一般にその固有値・固有ベクトルは Bethe 方程式の根を介して記述され、transcendental である。この様に、可積分 Markov 過程の定常状態は可換な転送行列の quasi-exactly solvable な 1 次元固有空間として棲息し、定常確率は algebraic と transcendental が拮抗する境目に位置する。この様な事情を反映する構造として現れるのが integrable probability における matrix product (28)

である．詳しくは 4 節に記述するが，周期系の定常確率の行列積表示は次の問題に集約される．

Stochastic  $R$  行列を構造関数とする ZF 代数の表現を構成せよ．

Zamolodchikov-Faddeev (ZF) 代数 (30) は元々  $(1+1)$  次元の可積分な場の理論における因子化散乱を記述する関係式として導入された [50, 18]．その構造関数は粒子の散乱行列であり，YBE により結合律が保証される．可積分 Markov 過程の文脈では ZF 代数は定常条件の局所版に相当し，Macdonald 多項式やその拡張への応用など，種々の側面を持つ．5.1 節とそこでの引用文献を参照されたい．5.2, 5.3 節では上の問題に一つの解を与える．それは量子ダイログ ( $q$ -boson の無限積) 型の ZF 代数の表現であり， $n$  種粒子零レンジ過程の定常確率の行列積表示を達成する． $q = 0$  に於いては結晶基底 [30, 32] や YBE の 3 次元的拡張である四面体方程式 [32, 33] と別の繋がりがあある．本稿ではスペースの都合上前者には触れず，後者については 6 節に簡単な模式図に載せるに留めた．

以下で用いる記号をまとめる． $q$  は generic とする． $\theta(\text{真}) = 1, \theta(\text{偽}) = 0$ ， $(z)_m = (z; q)_m = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - zq^j)$ ， $q$ -二項係数  $\binom{m}{k}_q = \theta(k \in [0, m]) \frac{(q)_m}{(q)_k (q)_{m-k}}$ ．記号  $(z)_m$  は常に  $(z; q)_m$  を指す．任意の長さ  $m$  の整数列  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  に対して  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ ，Kronecker デルタ  $\delta_{\alpha, \beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} = \prod_{i=1}^m \theta(\alpha_i = \beta_i)$ ．ただし  $\delta$  は局所状態にも頻繁に使われる． $\alpha \leq \beta$  あるいは  $\beta \geq \alpha$  は  $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  で定義される． $(0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  は  $0^m$  または単に  $0$  と書く．

本稿の内容は Vladimir Mangazeev 氏，丸山翔也氏，尾角正人氏との共同研究に基づく．

## 2. STOCHASTIC $R$ 行列

2.1. 量子  $R$  行列．始めに Drinfeld-Jimbo 量子アフィン代数  $U_q(A_n^{(1)})$  の対称テンソル表現に付随する量子  $R$  行列を与える．非常に良く知られた例であり， $U_q(A_n^{(1)})$  自体の定義や  $R$  行列の表現論的背景については [24] を参照されたい．

自然数  $l$  に対して有限集合  $B_l$  でラベルされる基底を持つベクトル空間  $V_l$  を導入する．

$$B_l = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \mid |\alpha| = l\}, \quad V_l = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in B_l} \mathbb{C}|\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\rangle. \quad (1)$$

今後  $|\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\rangle$  を  $|\alpha\rangle$  等と適宜略記する．自然数の対  $(l, m)$  に対し，量子  $R$  行列  $R = R^{l, m}(z) \in \text{End}(V_l \otimes V_m)$  を次の明示式により定義する．

$$R(z)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \sum_{\gamma \in B_l, \delta \in B_m} R(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle. \quad (2)$$

$$R(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = \frac{z^{-m} (q^{l-m} z; q^2)_{m+1}}{(q^{l-m+2} z^{-1}; q^2)_m} \sum_{c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} z^{c_0} \mathcal{R}_{\alpha_1, \beta_1, c_1}^{\gamma_1, \delta_1, c_0} \dots \mathcal{R}_{\alpha_n, \beta_n, c_n}^{\gamma_n, \delta_n, c_{n-1}} \mathcal{R}_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, c_0}^{\gamma_{n+1}, \delta_{n+1}, c_n}, \quad (3)$$

$$\mathcal{R}_{i, j, k}^{a, b, c} = \delta_{i+j}^{a+b} \delta_{j+k}^{b+c} q^{ik+b} \oint \frac{du}{2\pi i u^{b+1}} \frac{(-q^{2+a+c} u; q^2)_{\infty} (-q^{-i-k} u; q^2)_{\infty}}{(-q^{a-c} u; q^2)_{\infty} (-q^{c-a} u; q^2)_{\infty}} \in \mathbb{Z}[q]. \quad (4)$$

積分は  $u = 0$  の周りを反時計回りに周回するもので  $u^b$  の係数をとる． $z$  はスペクトルパラメータと呼ばれる．(4) に含まれる因子  $\delta_{i+j}^{a+b} \delta_{j+k}^{b+c}$  のため (3) は有限和となり，行列要素  $R(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta}$  は  $z, q$  の有理関数である． $\mathcal{R}_{i, j, k}^{a, b, c}$  は四面体方程式 [49] の解であり，量子座標環の表現論に起源を持つ [25]．それを (3) の様に合成，簡約したものが量子  $R$  行

列を与える事は [4] において指摘され, [34] で証明された. 和 (3) の計算についての最近の進展については [9] を参照のこと. 上の  $R^{l,m}(z)$  は

$$R^{l,m}(z)(|le_i\rangle \otimes |me_i\rangle) = |le_i\rangle \otimes |me_i\rangle \quad \forall i \in [1, n+1] \quad (5)$$

となるように規格化されている. ただし  $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ .

**2.2. Stochastic  $R$  行列  $S(z)$ .** 量子  $R$  行列から 2 種類の stochastic  $R$  行列を導く. 第一のもの  $S(z) = S^{l,m}(z) \in \text{End}(V_l \otimes V_m)$  は  $R^{l,m}(z)$  の単なる gauge 変換である.

$$S(z)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \sum_{\gamma \in B_l, \delta \in B_m} S(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle, \quad S(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = q^n R(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta}, \quad (6)$$

ただし,  $\eta = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (\delta_i \gamma_j - \alpha_i \beta_j)$ .

**定理 1** ([29]).  $z_{i,j} = z_i/z_j$  とおくと次の等式が成り立つ.

$$\text{YBE: } S_{1,2}^{k,l}(z_{1,2}) S_{1,3}^{k,m}(z_{1,3}) S_{2,3}^{l,m}(z_{2,3}) = S_{2,3}^{l,m}(z_{2,3}) S_{1,3}^{k,m}(z_{1,3}) S_{1,2}^{k,l}(z_{1,2}), \quad (7)$$

$$\text{Sum-to-1: } \sum_{\gamma \in B_l, \delta \in B_m} S^{l,m}(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = 1, \quad \forall (\alpha, \beta) \in B_l \times B_m, \quad (8)$$

$$\text{因子化: } S^{l,m}(z = q^{l-m})_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = \delta_{\alpha+\beta}^{\gamma+\delta} \Phi_{q^2}(\bar{\gamma}|\bar{\beta}; q^{-2l}, q^{-2m}) \quad (l \leq m). \quad (9)$$

ただし  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  は  $\beta$  から第  $n+1$  成分を省いたもので  $\bar{\gamma}$  も同様.

(9) に現れている  $\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu)$  は  $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対して

$$\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu) = q^{\varphi(\beta-\gamma, \gamma)} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{|\gamma|} \frac{(\lambda; q)_{|\gamma|} (\frac{\mu}{\lambda}; q)_{|\beta|-|\gamma|}}{(\mu; q)_{|\beta|}} \prod_{i=1}^n \binom{\beta_i}{\gamma_i}_q \quad (10)$$

により定義される, ただし  $\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \beta_j$ .  $\gamma \leq \beta$  でない限り  $\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu) = 0$  に注意する. (6) の  $q^n$  は余積の twist [39] の一つであり, YBE を保つ. Sum-to-1 (8) は規格化条件 (5) $_{|i=n+1}$  の  $U_q(A_n)$ -軌道に他ならない事が知られており, 後に全確率保存につながる.  $z = q^{l-m}$  において  $R^{l,m}(z)$  は非退化である. (9), (10) の様な因子化明示式の存在はこれまで認識されずにいた. 現時点でも概念的な説明があるわけではないが, 本稿の文脈では確率解釈に必要な非負性を明示的に保証する役割を持つ.  $S(z)$  自体の非負性については [27, Prop.3.6] を参照のこと. 今後行列の成分を以下の様に図示する.

$$S(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} \text{ or } \mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = \alpha \begin{array}{c} \delta \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ \beta \end{array} \gamma \quad (11)$$

$\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  は 2.3 節に導入される第 2 の stochastic  $R$  行列である.

**例 2.** 最も簡単な  $S(z) = S^{1,1}(z)$  の成分  $S(z)_{e_k, e_l}^{e_i, e_j}$  を  $S(z)_{k,l}^{i,j}$  と書くと, 零でないものは以下のとおり. ( $1 \leq i \neq j \leq n+1$ )

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ i \text{---} i \\ \downarrow \\ i \end{array} & \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ i \text{---} i \\ \downarrow \\ j \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ i \text{---} j \\ \downarrow \\ j \end{array} \\ 1 & \frac{z-1}{z-q^2} q^{2\theta(i>j)} & \frac{1-q^2}{z-q^2} z^{\theta(i>j)}, \end{array}$$

これに 2.4 節の構成法を用いると 1 次元の  $n$  種粒子非対称排他過程 ( $n$ -species asymmetric simple exclusion process,  $n$ -ASEP) の Markov 行列が得られる.

2.3. **Stochastic  $R$  行列  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$ .** 第二の stochastic  $R$  行列  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  を導入しよう. これは (9) $|_{q^2 \rightarrow q}$  において  $q^{-l}, q^{-m}$  をパラメータ  $\lambda, \mu$  と見做したものに相当する. 無限次元ベクトル空間  $W = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathbb{C}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$  を導入する. 基底  $|\alpha\rangle = |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$  は  $n$ -成分でラベルされ, (1) と異なる事に注意.  $\mathcal{S}(\lambda, \mu) \in \text{End}(W \otimes W)$  は

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle, \quad (12)$$

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = \delta_{\alpha+\beta}^{\gamma+\delta} \Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu) \quad (13)$$

で定義される. 直和分解  $W \otimes W = \bigoplus_{\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \left( \bigoplus_{\alpha+\beta=\kappa} \mathbb{C}|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \right)$  に応じて  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  も有限次元行列の直和となる. 通常の量子  $R$  行列と異なり「差法性」 $\mathcal{S}(\lambda, \mu) = \mathcal{S}(a\lambda, a\mu)$  を持たない事に注意.

**定理 3** ([29]).  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  は以下の YBE と Sum-to-1 を満たす.

$$\mathcal{S}_{1,2}(\nu_1, \nu_2) \mathcal{S}_{1,3}(\nu_1, \nu_3) \mathcal{S}_{2,3}(\nu_2, \nu_3) = \mathcal{S}_{2,3}(\nu_2, \nu_3) \mathcal{S}_{1,3}(\nu_1, \nu_3) \mathcal{S}_{1,2}(\nu_1, \nu_2), \quad (14)$$

$$\sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = 1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n. \quad (15)$$

$\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu)$  (10) は  $n = 1$  の場合に Povolotsky [37] により導入され, その後多くの  $n = 1$  模型の研究の契機となった. 次の性質は後で用いられる.

$$\mathcal{S}^{m,m}(1)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle, \quad \mathcal{S}(\lambda, \lambda)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle. \quad (16)$$

2.4. **可換な転送行列.** 以下暫く標準的な話 [3, 28] になる. 自然数  $l, m_1, \dots, m_L$  とパラメータ  $z, w_1, \dots, w_L$  に対し,

$$T(l, z |_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L}) = \text{Tr}_{V_l} \left( S_{0,L}^{l, m_L}(z/w_L) \cdots S_{0,1}^{l, m_1}(z/w_1) \right) \in \text{End}(V_{m_1} \otimes \cdots \otimes V_{m_L}) \quad (17)$$

とおく. これは stochastic  $R$  行列  $S(z)$  に付随する 2 次元正方格子上の頂点模型の転送行列 [3] であり, 量子逆散乱法 [28] の用語では添字  $1, 2, \dots, L$  で表される  $V_{m_1} \otimes \cdots \otimes V_{m_L}$  は「量子空間」, 添字  $0$  で表される  $V_l$  は「補助空間」という.  $z$  はスペクトルパラメータ,  $w_1, \dots, w_L$  は非一様性パラメータ等と呼ばれる.  $S_{0,i}^{l, m_i}(z/w_i)$  は  $V_l \otimes V_{m_i}$  に対して  $S^{l, m_i}(z/w_i)$  として, 他の成分には 1 として働く stochastic  $R$  行列を表す. 差方性  $T(l, z |_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L}) = T(l, az |_{aw_1, \dots, aw_L}^{m_1, \dots, m_L})$  が成り立つ. YBE (7) から可換性

$$[T(l, z |_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L}), T(l', z' |_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L})] = 0$$

が導かれる.  $T = T(l, z |_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L})$  の基底への作用を

$$T(|\beta_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\beta_L\rangle) = \sum_{\alpha_i \in B_{m_i}} T_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} |\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_L\rangle \in V_{m_1} \otimes \cdots \otimes V_{m_L}. \quad (18)$$

と書くと, 行列要素は (11) を連結して以下の様に図示される.

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} = \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_{L-1} \in B_l} \begin{array}{ccccccc} & \alpha_1 & & \alpha_2 & & & \alpha_L \\ & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow \\ \gamma_0 & \rightarrow & \gamma_1 & \rightarrow & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{L-1} & \rightarrow & \gamma_0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ & \beta_1 & & \beta_2 & & & \beta_L \end{array}$$

$T$  はウェイトを保存する.

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} = 0 \text{ unless } \alpha_1 + \cdots + \alpha_L = \beta_1 + \cdots + \beta_L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}.$$

Stochastic  $R$  行列  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  についても同様に

$$\mathcal{T}(\lambda|\mu_1, \dots, \mu_L) = \text{Tr}_W (\mathcal{S}_{0,L}(\lambda, \mu_L) \cdots \mathcal{S}_{0,1}(\lambda, \mu_1)) \in \text{End}(W^{\otimes L}),$$

として転送行列が定義され, 可換性

$$[\mathcal{T}(\lambda|\mu_1, \dots, \mu_L), \mathcal{T}(\lambda'|\mu_1, \dots, \mu_L)] = 0 \quad (19)$$

及びウェイト保存が成り立つ.  $T(l, z|_{w_1, \dots, w_L}^{m_1, \dots, m_L})$  と  $\mathcal{T}(\lambda|\mu_1, \dots, \mu_L)$  の固有値は解析的 Bethe 仮説により [29, Sec.4] に与えられている.

### 3. 可積分 MARKOV 過程

3.1. 可換な Markov 転送行列. 前節の転送行列を用いて次の離散時間発展系を考える.

$$|P(t+1)\rangle = T(l, q^l |_{q^{m_1}, \dots, q^{m_L}}^{m_1, \dots, m_L}) |P(t)\rangle \in V_{m_1} \otimes \cdots \otimes V_{m_L}, \quad (20)$$

$$|P(t+1)\rangle = \mathcal{T}(\lambda|\mu_1, \dots, \mu_L) |P(t)\rangle \in W^{\otimes L}. \quad (21)$$

$t$  が離散時間変数である. 右辺を (18) の様に表した際, 以下の条件 (i), (ii) が満たされれば Markov 過程のマスター方程式と見做す事が出来る.

- (i) 非負性;  $T_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  for any  $(\alpha_1, \dots, \alpha_L)$  and  $(\beta_1, \dots, \beta_L)$ ,
- (ii) Sum-to-1;  $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_L} T_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} = 1$  for any  $(\beta_1, \dots, \beta_L)$ .

後者は全確率保存条件である.

**命題 4** ([29]). (20) では  $l \leq \min\{m_1, \dots, m_L\}$ ,  $q \in \mathbb{R}_{>0}$  であれば性質 (i), (ii) が成り立つ. (21) では  $0 < \forall \mu_i^\epsilon < \lambda^\epsilon < 1, 0 < q^\epsilon < 1$  ( $\epsilon = \pm 1$ ) であれば性質 (i), (ii) が成り立つ.

今後パラメータは命題 4 の範囲にとるものとする. こうして離散時間 Markov 過程が定式化される.  $T(l, q^l |_{q^{m_1}, \dots, q^{m_L}}^{m_1, \dots, m_L})$ ,  $\mathcal{T}(\lambda|\mu_1, \dots, \mu_L)$  をここでは Markov 転送行列と呼ぶ. どちらもウェイトを保存を反映して, 粒子描像 (後述) では粒子数を保存する.

**注意 5.** Stochastic  $R$  の Sum-to-1 (8), (15) だけからは Markov 転送行列の Sum-to-1 (ii) は従うわけではない. 命題 4 の証明には行列要素 (9) と (13) が因子  $\delta_{\alpha+\beta}^{\gamma+\delta}$  以外は  $\alpha, \delta$  に依らない事が効く. スペクトルパラメータの特殊化  $z = q^{l-m}$  (9) は, この性質に加え, 適当な領域での非負性を保証するという 2 重の目的を達成する.

**注意 6.** 時間発展系 (20) で  $m_1, \dots, m_L$  は相異なるとし,  $T_i = T(m_i, q^{m_i} |_{q^{m_1}, \dots, q^{m_L}}^{m_1, \dots, m_L})$  とおく. (16) の左式により  $T_1, \dots, T_L$  では補助空間が量子空間に「合流」し, 形式的に前者を用いない記述が出来る. 次図 ( $L=3$ ) 参照.

$$T_1 = \dots \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \dots \quad T_2 = \dots \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \dots \quad T_3 = \dots \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \dots$$

矢印を粒子の軌跡と見做すと, それらは一周して元の場所に戻る運動により自分達を「かきまわす». この様な系は Yang による 1次元デルタ関数 bose 気体の研究 [48, eq.(14)] に現れた. 今の設定では  $m_p = \min\{m_1, \dots, m_L\}$  を満たす添字を  $p$  とすると  $T_p$  は先の条件 (i), (ii) を満たしている. この意味で可換な時間発展  $T_1, \dots, T_L$  は「stochastic Yang 系」と呼ぶと分かり易い. (21) の場合も同様である.

3.2. 連続時間 Markov 過程. 離散時間発展系 (21) で一様な場合  $\mu_1 = \dots = \mu_L = \mu$

$$\mathcal{T}(\lambda|\mu) = \mathcal{T}(\lambda|\mu, \dots, \mu)$$

を考える. 可換性 (19) を考慮して Markov 転送行列の対数微分

$$H_r = -\epsilon\mu^{-1} \frac{\partial \log \tau(\lambda|\mu)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1}, \quad H_l = \epsilon\mu \frac{\partial \log \tau(\lambda|\mu)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\mu} \quad (22)$$

をとる ( $\epsilon = \pm 1$ ). その際  $\tau(1|\mu) = \text{id}_{W^{\otimes L}}$  と  $\tau(\mu|\mu)$  が巡回的並進  $\tau(\mu|\mu)(|\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_L\rangle) = |\alpha_L\rangle \otimes |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{L-1}\rangle$  である事から  $H_r, H_l$  は隣接成分だけに作用する行列の和になる. 具体的には

$$H_r = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{r,i,i+1}, \quad H_l = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{l,i,i+1}$$

と表され,  $h_{r,i,i+1}, h_{l,i,i+1}$  は  $W^{\otimes L}$  の第  $i, i+1$  成分に  $h_r, h_l \in \text{End}(W \otimes W)$  として, 他の成分には自明に働く.  $h_r, h_l$  は次の様に与えられる.

$$\begin{aligned} h_r(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= \epsilon \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}} \frac{q^{\varphi(\alpha-\gamma, \gamma)} \mu^{|\gamma|-1} (q)_{|\gamma|-1}}{(\mu q^{|\alpha|-|\gamma|})_{|\gamma|}} \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}_q |\alpha - \gamma\rangle \otimes |\beta + \gamma\rangle \\ &\quad - \epsilon \sum_{i=0}^{|\alpha|-1} \frac{q^i}{1 - \mu q^i} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} h_l(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= \epsilon \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}} \frac{q^{\varphi(\gamma, \beta-\gamma)} (q)_{|\gamma|-1}}{(\mu q^{|\beta|-|\gamma|})_{|\gamma|}} \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}_q |\alpha + \gamma\rangle \otimes |\beta - \gamma\rangle \\ &\quad - \epsilon \sum_{i=0}^{|\beta|-1} \frac{1}{1 - \mu q^i} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

頂点模型の可換な転送行列からスピン鎖の Hamiltonian を得る対数微分 (22) は Baxter 公式 [3, eq.(10.14.20)] として知られた標準的処方箋である. 今の場合に興味深いのはそれが適用できる “Hamiltonian point” が  $\lambda = 1$  と  $\lambda = \mu$  の 2 点存在することで, 後述の right mover と left mover に対応する.

次の時間発展方程式を考えよう.

$$\frac{d}{dt} |P(t)\rangle = H |P(t)\rangle \in W^{\otimes L} \quad (H = H_r, H_l). \quad (25)$$

$H$  の基底への作用を  $H(|\beta_1\rangle \otimes \dots \otimes |\beta_L\rangle) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_L} H_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_L\rangle$  と書いた時, (25) は以下の条件が満たされれば連続時間 Markov 過程のマスター方程式と見做すことができる.

(i)' 非負性;  $H_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_L) \neq (\beta_1, \dots, \beta_L),$

(ii)' Sum-to-0;  $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_L} H_{\beta_1, \dots, \beta_L}^{\alpha_1, \dots, \alpha_L} = 0 \quad \forall (\beta_1, \dots, \beta_L).$

後者は全確率保存条件である. Stochastic  $R$  の Sum-to-1 (15) と Baxter 公式 (22) から (ii)' が直ちに従う. 一方 (i)' については (23), (24) を調べれば良い. 結果は以下のとおり.

**命題 7** ([29]).  $H_r, H_l$  は共に (ii)' を満たし, 更に  $0 < q^\epsilon, \mu^\epsilon < 1$  ( $\epsilon = \pm 1$ ) であれば (i)' も満たす.

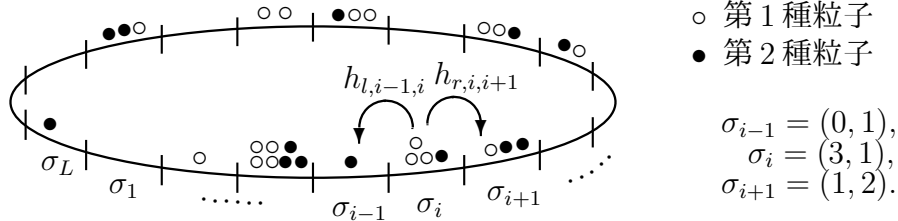
今後は命題 7 の条件が満たされるパラメータ域を想定する．こうして  $H_r, H_l$  を Markov 行列とする Markov 過程が得られ，(21) の連続時間版を与える．

可換性 (19) から  $[H_r, H_l] = 0$  なので，これらは重ね合わせたもの  $H(a, b, \epsilon, q, \mu) = aH_r(\epsilon, q, \mu) + bH_l(\epsilon, q, \mu)$  と対角化問題を共有する．実は興味深い対称性

$$H(a, b, -\epsilon, q^{-1}, \mu^{-1}) = \mathcal{P}H(\mu b, \mu a, \epsilon, q, \mu)\mathcal{P}^{-1}$$

が成り立つ．ただし  $\mathcal{P} \in \text{End}(W^{\otimes L})$  は  $\mathcal{P}(|\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_L\rangle) = |\alpha_L\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_1\rangle$  で定義される parity 演算子である．

Markov 過程 (25) は長さ  $L$  の 1 次元周期的格子上的  $n$  種粒子系という自然な描像を持つ．基底  $|\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_L\rangle \in W$  で  $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  という状況は，格子のサイト  $i$  に第  $a$  種の粒子が  $\alpha_{i,a}$  個いる状態と見做す．各格子点に占める粒子数に制限は無い．Markov 行列  $H_r, H_l$  はそれらを右，左の隣接サイトに確率的に遷移させる．その遷移率は (23), (24) の右辺第一項の係数であり， $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  は移動する粒子数を表す．上に述べた重ね合わせ  $H(a, b, \epsilon, q, \mu)$  は right mover と left mover の混在する系に対応する．遷移率は粒子の出発サイト ((23) では  $|\alpha\rangle$ ，(24) では  $|\beta\rangle$ ) と移動粒子の情報  $\gamma$  だけで決まり，到着サイトの状況に依らない．相互作用が on-site のみ働くという意味で，この様な系を  $n$  種粒子零レンジ過程 ( $n$ -species zero range process,  $n$ -ZRP) という． $n = 2$  の系のスナップショットの例を示す．



前節 3.1 の可積分 Markov 過程と本節 3.2 の  $n$ -ZRP は先行研究された多くの模型を含む．特に  $n = 1$  の場合には [5, 8, 7, 12, 13, 22, 37, 44] を始めとする多くの結果があり，鳥瞰図 [27, Fig.1,2] に見易くまとめられている．

$n > 1$  の場合としては，例えば  $H_r$  で  $\epsilon = 1, \mu \rightarrow 0$  の時，(23) で非自明な遷移は  $|\gamma| = 1$  に限定され，粒子数  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  のサイトから第  $a$  種粒子 1 個だけが抜け出る遷移率は  $q^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{a-1}} \frac{1-q^{\alpha_a}}{1-q}$  となるが，これは  $n$  種  $q$ -boson 系 [45] ( $n = 1$  の場合は [42]) を再現する．他にも  $H_l$  でパラメータが  $\epsilon = 1, (\mu, q) \rightarrow (0, 0)$  の場合，(24) の遷移は  $\varphi(\gamma, \beta - \gamma) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_i (\beta_j - \gamma_j) = 0$  に限定される．従って第  $a$  種粒子の移動  $\gamma_a > 0$  が許されるには  $\gamma_{a+1} = \beta_{a+1}, \gamma_{a+2} = \beta_{a+2}, \dots, \gamma_n = \beta_n$  が必要で，大きな種の粒子ほど移動の優先権を持つ完全非対称零レンジ過程となる．これは結晶基底 [32] や四面体方程式 [33] との関係が知られた模型に一致する．零レンジ過程一般について，凝縮等の興味深い性質については [16, 21, 26, 43] 等を参照されたい．

Stochastic  $R$  行列  $S(z)$  に付随する転送行列 (17) で一様な場合  $T(m, z | \begin{smallmatrix} m, \dots, m \\ 1, \dots, 1 \end{smallmatrix})$  に Baxter 公式を適用すると，(8) のおかげで Sum-to-0 は成り立つが非負性は  $m > 1$  では一般に満たされない．例外は  $m = 1$  で，例 2 を用いると，遷移  $|i, j\rangle \rightarrow |j, i\rangle$  のレート  $r_{i,j}$  は  $r_{i,j} : r_{j,i} = 1 : q^2$  ( $1 \leq i < j \leq n+1$ ) 満たし， $n$  種粒子の ASEP を与える． $n$ -ASEP は特に  $n = 1$  の場合に多くの研究がされている．一方  $n$  一般で知られた結果としては，周期系の定常確率の行列積表示 [38]，セクターの Hasse 図に関するスペクトル双対性 [1]，無限系でのマスター方程式の初期値問題の解 [46]，Ferrari-Martin アルゴリズム [19] の結晶基底による定式化 [30]，四面体方程式との関係 [31]，Macdonald 多項式とその拡張への応用 [20] 等が知られている．

#### 4. 定常状態と行列積

4.1. 定常確率. 離散時間発展系 (21) を考える.  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  とし,  $W^{\otimes L}$  の有限次元部分空間

$$W(k) = \bigoplus_{(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \mathcal{B}(k)} \mathbb{C} |\sigma_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\sigma_L\rangle,$$

を導入する. ここで  $\mathcal{B}(k) = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)^L \mid \sigma_1 + \cdots + \sigma_L = k\}$  である. 各  $W(k)$  ないし  $k$  をセクターと呼ぶ. 粒子数は保存するのでマスター方程式 (21) はセクターごとの方程式に分離している. Markov 行列の一般論から各  $k$  ごとに時間発展で不変, 即ち

$$|\bar{P}\rangle = \mathcal{T}(\lambda | \mu_1, \dots, \mu_L) |\bar{P}\rangle \in W(k) \quad (26)$$

を満たす 0 でないベクトル  $|\bar{P}\rangle$  が規格化を除いて一意的に存在する. それを  $|\bar{P}\rangle = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \mathcal{B}(k)} \mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L) |\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle$  として, 更に  $\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \mathcal{B}(k)} \mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L) = 1$  と規格化されている時,  $|\bar{P}\rangle$  を定常状態,  $\mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$  を定常確率という. 但し以下では規格化は度外視してこれらの用語を使う.

連続時間の系 (25) は (22) により離散時間の場合に含まれるので今後主に後者を考察の対象とする. 可換性 (19) により定常状態  $|\bar{P}\rangle$  (26) は  $\lambda$  に依らない. 定常確率はセクター  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  と粒子配置  $(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$  の他には  $n, L, q, \mu_1, \dots, \mu_L$ , に依存する量である.  $k$  に 0 の成分があるセクターは, 粒子のラベルを適宜取り替えて  $n' (< n)$  種粒子の模型に帰着する.  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$  を満たすセクターを基本セクターと呼ぶ.

4.2. 定常確率の例.  $n = 1$  の場合 [37, 17] には定常確率は各サイトごとに粒子数から定まる因子の積になる. 具体的には  $\mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L) = \prod_{i=1}^L g_{\sigma_i}(\mu_i)$  ( $\sigma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) と表され, 因子  $g_{\sigma_i}(\mu_i)$  は次式の  $n = 1$  の場合である.

$$g_{\alpha}(\mu) = \frac{\mu^{-|\alpha|} (\mu)_{|\alpha|}}{\prod_{i=1}^n (q)_{\alpha_i}} \quad (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n). \quad (27)$$

このような因子化は  $n \geq 2$  では起こらない.

例 8.  $(L, n) = (3, 2)$  でセクター  $k = (1, 1)$  の定常状態は以下のとおり.

$$\begin{aligned} |\bar{P}\rangle &= \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 (1 - \mu_2) (1 - \mu_3) (\mu_1 \mu_2 + q \mu_1 \mu_3 + q \mu_2 \mu_3 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 - 2q \mu_1 \mu_2 \mu_3) |\emptyset, 1, 2\rangle \\ &\quad + \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 (1 - \mu_2) (1 - \mu_3) (q \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 - 2\mu_1 \mu_2 \mu_3 - q \mu_1 \mu_2 \mu_3) |\emptyset, 2, 1\rangle \\ &\quad + \mu_1^2 \mu_2^2 (1 - \mu_3) (1 - q \mu_3) (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 - 3\mu_1 \mu_3 \mu_2) |\emptyset, \emptyset, 12\rangle + \text{cyclic}. \end{aligned}$$

ここで例えば  $|\emptyset, 1, 2\rangle$  は粒子数表示  $|(0, 0), (1, 0), (0, 1)\rangle$  の状態の multiset 表示である. また cyclic は, 巡回的並進  $\mu_j \rightarrow \mu_{j+1}$  and  $|\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle \rightarrow |\sigma_L, \sigma_1, \dots, \sigma_{L-1}\rangle$  により得られる 6 項を表す.

予想 9. 各基本セクターに於いて, 全ての配置の定常確率は適当な規格化により  $\mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q, -\mu_1, \dots, -\mu_L]$  となる.

4.3. 行列積. 適当な空間に作用するオペレーター  $X_{\alpha}(\mu)$  を導入して定常確率を

$$\mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L) = \text{Tr}(X_{\sigma_1}(\mu_1) \cdots X_{\sigma_L}(\mu_L)) \quad (28)$$

と表示する事を考える. 定常状態の性質をオペレーター  $X_{\alpha}(\mu)$  に集約しようというアイデアである. これに関して次の事実が基本的である.



命題 10. オペレーター  $X_\alpha(\mu)$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ) が関係式

$$X_\alpha(\mu)X_\beta(\lambda) = \sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\gamma, \delta}^{\beta, \alpha} X_\gamma(\lambda)X_\delta(\mu) \quad (29)$$

を満たし、トレースが 0 でなく有限であれば行列積表示 (28) が成り立つ。

証明は、可換性により (26) で例えば  $\lambda = \mu_L$  とした場合を示せばよい。それには (29) を使って (28) の  $X_{\sigma_L}(\mu_L)$  を左へ運びトレースを一周させて (26) の右辺を導けばよい。量子 Knizhnik-Zamolodchikov 型方程式を扱う際に良く出てくる操作である。[35, Prop.6] も参照のこと。

## 5. ZAMOLODCHIKOV-FADDEEV ALGEBRA

5.1. 一般的事柄. 関係式 (29) はオペレーターの集まり  $X(\mu) = (X_\alpha(\mu))$  を用いて

$$X(\mu) \otimes X(\lambda) = \check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) [X(\lambda) \otimes X(\mu)] \quad (30)$$

と書ける。ただし成分の入れ替え  $P(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$  を用いて  $\check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) = P\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  とおいた。三つの積  $X(\nu) \otimes X(\mu) \otimes X(\lambda)$  を (30) を用いて逆順に並べ替えて  $X(\lambda) \otimes X(\mu) \otimes X(\nu)$  にするには 2 通りの仕方があるが、それらが一致という結合律は YBE により保証される。この様に YBE の解を構造定数を持つ 2 次の関係式を Zamolodchikov-Faddeev (ZF) 代数という。以下では代数とその関係式、生成元と表現に対して用語・記号の使い分けといった煩雑さは適宜略す。

ZF 代数は元々 (1+1) 次元の可積分な場の理論に於いて粒子の因子化散乱を記述する関係式として導入された [50, 18]。その文脈では構造関数は unitarity 等の相対論的要請を満たす散乱行列である。可積分 Markov 過程でも事情は並行しており、ZF 代数は定常条件の局所版に該当する。構造関数は stochastic  $R$  行列であり、YBE 以外に Sum-to-1 等の性質が要請される。関係式 (30) は  $\check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu)$  に関して非一様なので、 $X_\alpha(u)$  のスカラー倍に吸収できる gauge 自由度以外の規格化は crucial である事に注意しよう。

ZF 代数は離散時間 Markov 過程の定常条件 (26) と相性が良いが、歴史的にはその無限小版が連続時間 Markov 過程の定常条件として先に登場し [15]、多くの研究の契機となった。例えば [6, 11, 14, 41] 等を参照のこと。今の設定では次の関係式である。

$$h[X(\mu) \otimes X(\mu)] = X(\mu) \otimes X'(\mu) - X'(\mu) \otimes X(\mu). \quad (31)$$

これは (30) の  $\lambda = \mu$  における微分で  $\check{\mathcal{S}}(\mu, \mu) = \text{id}$ ,  $h = \frac{\partial}{\partial \lambda} \check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu)|_{\lambda=\mu}$  としたもので、(16), (22) と整合している。無限小版 ZF 代数 (31) は  $\mu_i$  が一様な場合の行列積状態  $\text{Tr}(X(\mu) \otimes \cdots \otimes X(\mu))$  が Markov 行列  $H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{i, i+1}$  の零固有ベクトルである事を頭にしてしている。無限小版 (31) と離散版 (30) の関係は XXZ 模型と 6 頂点模型の関係にあると見て良い。

ZF 代数に戻ると、所謂  $RLL = LLR$  型の関係式

$$[\mathcal{L}(\lambda) \otimes \mathcal{L}(\mu)] \check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) = \check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) [\mathcal{L}(\lambda) \otimes \mathcal{L}(\mu)] \quad (32)$$

に自然に埋め込まれる。実際、あるラベル、例えば 0、に対して  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)_{0,0}^{\beta, \alpha} = \mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\beta, \alpha}^{0,0} = \theta(\alpha = \beta = 0)$  となっていれば、 $\mathcal{L}(\mu)_{\alpha, 0} = X_\alpha(\mu)$  という同定の元に (32) の  $|0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$  に対応する要素は (30) を与える。この視察により、定常状態の構成は  $RLL = LLR$  関係式の表現で  $\text{Tr}(\mathcal{L}(\mu_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(\mu_L))$  の該当成分が 0 でなく有限なものを求めるという問題に持ち上がり、吸収される。その様な表現は、構造関数が (6) の  $S^{l,m}(z)$  の場合には、[23] の  $L$ -差用素の fusion に適当な余積の twist [39] を施したものの中に見出されると期待できる。一方構想関数が  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  の場合はその特殊な出自 (9)–(13)

から、より非自明な様相が予期される。こうした動機から次の 5.2 節では  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$  を構造関数とする ZF 代数を扱う。

最後に Sum-to-1 (15) の帰結についてコメントする。(29) の  $\alpha, \beta$  について和をとる。その際 (15) を適用してウェイト保存を用いると

$$[A(\mu|w), A(\lambda|w)] = 0, \quad A(\lambda|w) := \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\lambda)w^{\alpha} \quad (33)$$

が導かれる。ただし  $w^{\alpha} = w_1^{\alpha_1} \cdots w_n^{\alpha_n}$  とおいた。行列積表示 (28) に  $w^{\sigma_1 + \cdots + \sigma_L}$  をかけて  $(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)^L$  について和をとると  $w$  の級数  $\text{Tr}(A(\mu_1|w) \cdots A(\mu_L|w))$  が得られ、その  $w^k = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}$  の係数はセクター  $k$  の定常確率の規格化定数を与える。可換性 (33) からこの規格化「定数」 $P_k(\mu_1, \dots, \mu_L; q)$  は  $q$  をパラメータとする  $\mu_1, \dots, \mu_L$  の対称有理関数となる。同様の事情は他の模型にも当てはまり、Macdonald 多項式やその拡張に対する行列式表示が得られている [8, 10, 20]。本稿では 2-ZRP の場合に母関数  $A(\lambda|w)$  (33) の明示式を例 12 に提示するに留める。

5.2.  $q$ -boson 表現. (12), (13) により ZF 代数 (29) の具体形は次で与えられる。

$$X_{\alpha}(\mu)X_{\beta}(\lambda) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \Phi_q(\beta|\alpha + \beta - \gamma; \lambda, \mu)X_{\gamma}(\lambda)X_{\alpha+\beta-\gamma}(\mu). \quad (34)$$

和の条件  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  は今後省く。(27) の  $g_{\alpha}(\mu)$  を用いて

$$X_{\alpha}(\mu) = g_{\alpha}(\mu)Z_{\alpha}(\mu) \quad (35)$$

とおくと、(34) は次の様に表される ( $\varphi(\alpha, \beta)$  の定義は (10) の下)。

$$Z_{\alpha}(\mu)Z_{\beta}(\lambda) = \sum_{\gamma \leq \alpha} q^{\varphi(\alpha-\gamma, \beta-\gamma)} \Phi_q(\gamma|\alpha; \lambda, \mu)Z_{\gamma}(\lambda)Z_{\alpha+\beta-\gamma}(\mu). \quad (36)$$

$\mathcal{B}$  を生成元  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{k}$  と関係式

$$\mathbf{k}\mathbf{b} = q\mathbf{b}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\mathbf{c} = q^{-1}\mathbf{k}\mathbf{c}, \quad \mathbf{b}\mathbf{c} = 1 - \mathbf{k}, \quad \mathbf{c}\mathbf{b} = 1 - q\mathbf{k}. \quad (37)$$

で定義される代数とし、 $q$ -boson 代数と呼ぶ。Fock 空間  $F = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}(q)|m\rangle$  とその双対  $F^* = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}(q)\langle m|$  に  $\mathcal{B}$  の表現を以下の様に定める。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}|m\rangle &= |m+1\rangle, & \mathbf{c}|m\rangle &= (1-q^m)|m-1\rangle, & \mathbf{k}|m\rangle &= q^m|m\rangle, \\ \langle m|\mathbf{c} &= \langle m+1|, & \langle m|\mathbf{b} &= \langle m-1|(1-q^m), & \langle m|\mathbf{k} &= \langle m|q^m. \end{aligned}$$

ただし  $|-1\rangle = \langle -1| = 0$  とする。 $F^*$  と  $F$  のペアリングを  $\langle m|m'\rangle = \delta_{m,m'}(q)_m$  とすると  $\langle m|(X|m'\rangle) = (\langle m|X|m'\rangle)$  が成り立ち  $\text{Tr}(X) = \sum_{m \geq 0} \frac{\langle m|X|m\rangle}{(q)_m}$  である。

ZF 代数 (36) は自明な表現  $Z_{\alpha}(\zeta) = K_{\alpha}$  を持つ、ただし  $K_{\alpha}$  は  $K_0 = 1$ ,  $K_{\alpha}K_{\beta} = q^{\varphi(\alpha, \beta)}K_{\alpha+\beta}$  を満たす任意のオペレーターである [35, Prop.7]。この様な  $K_{\alpha}$  は容易に構成できる。例えば

$$K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \mathbf{k}^{\alpha_1^+} \mathbf{c}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}^{\alpha_{n-1}^+} \mathbf{c}^{\alpha_{n-1}} \in \mathcal{B}^{\otimes n-1}, \quad \alpha_i^+ := \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n. \quad (38)$$

しかしこの表現は生成演算子  $\mathbf{b}$  を含まず行列積 (28) は 0 になってしまう。以下に与える表現はこの自明表現からの生成演算子に関する摂動級数と見做せる。今後  $0 < q < 1$  とする。

$Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\zeta) \in \mathcal{B}^{\otimes n(n-1)/2}$  を  $n$  に関する初期値と漸化式により次の様に定義する。

$$Z_{\alpha_1}(\zeta) = 1, \quad (39)$$

$$Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\zeta) = \sum_{l=(l_1, \dots, l_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}} X_l(\zeta) \otimes \mathbf{b}^{l_1} \mathbf{k}^{\alpha_1^+} \mathbf{c}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}^{l_{n-1}} \mathbf{k}^{\alpha_{n-1}^+} \mathbf{c}^{\alpha_{n-1}}. \quad (40)$$

右辺では (35) に従い  $X_l(\zeta) = g_l(\zeta)Z_l(\zeta)$  であり,  $\alpha_i^+$  は (38) で指定される.

**定理 11** ([36]). (39)–(40) で定義される  $Z_\alpha(\zeta)$  は一般の  $n$  で ZF 代数 (36) を満たす.

5.3. 明示式. (40) によれば  $Z_\alpha(\zeta)$  の  $\alpha$  依存性は単純で, (38) の  $K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  を用いて

$$Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\zeta) = Z_{0^n}(\zeta) (1^{\otimes \frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \otimes K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$$

と書ける. 従って明示式は

$$Z_{0^n}(\zeta) = \sum_{l_1, \dots, l_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} g_{l_1, \dots, l_{n-1}}(\zeta) Z_{l_1, \dots, l_{n-1}}(\zeta) \otimes \mathbf{b}^{l_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}^{l_{n-1}}$$

に対して与えれば十分である. 例えば  $n = 2$  では

$$\begin{aligned} Z_{0,0}(\zeta) &= \sum_{l_1 \geq 0} \frac{(\zeta)_{l_1} \zeta^{-l_1}}{(q)_{l_1}} \mathbf{b}^{l_1} = \frac{(\mathbf{b})_\infty}{(\zeta^{-1} \mathbf{b})_\infty}, \quad Z_{\alpha_1, \alpha_2}(\zeta) = Z_{0,0}(\zeta) K_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{(\mathbf{b})_\infty}{(\zeta^{-1} \mathbf{b})_\infty} \mathbf{k}^{\alpha_2} \mathbf{c}^{\alpha_1}, \\ X_{\alpha_1, \alpha_2}(\zeta) &= g_{\alpha_1, \alpha_2}(\zeta) Z_{\alpha_1, \alpha_2}(\zeta) = \frac{\zeta^{-\alpha_1 - \alpha_2} (\zeta)_{\alpha_1 + \alpha_2}}{(q)_{\alpha_1} (q)_{\alpha_2}} \frac{(\mathbf{b})_\infty}{(\zeta^{-1} \mathbf{b})_\infty} \mathbf{k}^{\alpha_2} \mathbf{c}^{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (41)$$

ここでの表現は ZF 代数から  $q$ -boson の適当な completion への代数射のことで, その像自体も  $X_\alpha(\zeta), Z_\alpha(\zeta)$  と記している.

**例 12.**  $n = 2$  の時, 可換な母関数 (33) は次の明示式を持つ.

$$\begin{aligned} A(\lambda|w) &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} X_{\alpha_1, \alpha_2}(\zeta) w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} = \frac{(\mathbf{b})_\infty}{(\lambda^{-1} \mathbf{b})_\infty} \sum_{l, m \geq 0} \frac{w_1^m w_2^l \lambda^{-l-m} (\lambda)_{l+m}}{(q)_l (q)_m} \mathbf{k}^l \mathbf{c}^m \\ &= \frac{(\mathbf{b})_\infty}{(\lambda^{-1} \mathbf{b})_\infty} \Gamma(w_1 \lambda^{-1}, w_2 \lambda^{-1})^{-1} \Gamma(w_1, w_2), \quad \Gamma(w_1, w_2) = (w_1 \mathbf{c})_\infty (w_2 \mathbf{k})_\infty. \end{aligned}$$

この様な母関数は定常状態を大正準集団の描像で解析する際に有用となる (cf. [16]).

一般の  $n (\geq 2)$  について明示式を書き下すため,  $q$ -boson (37) のコピー  $\mathcal{B}_{i,j} = \langle \mathbf{b}_{i,j}, \mathbf{c}_{i,j}, \mathbf{k}_{i,j} \rangle$  ( $1 \leq i \leq j < n$ ) を導入する. これらは添字対が異なれば可換とする.  $\otimes_{1 \leq i \leq j < n} \mathcal{B}_{i,j}$  (の completion) の元

$$\begin{aligned} Y_j(\zeta) &= V_{j-1}(1) V_{j-1}(\zeta)^{-1} = V_{j-1}(\zeta)^{-1} V_{j-1}(1), \\ V_j(\zeta) &= (\zeta^{-1} A_{1,j})_\infty (\zeta^{-1} A_{2,j})_\infty \cdots (\zeta^{-1} A_{j,j})_\infty, \\ A_{i,j} &= \mathbf{k}_{1,j-1} \mathbf{k}_{2,j-1} \cdots \mathbf{k}_{i-1,j-1} \mathbf{c}_{i,j-1} \mathbf{b}_{i,j} \quad (\mathbf{c}_{j,j-1} = 1) \end{aligned}$$

を導入する. 特に  $A_{1,n-1} = \mathbf{c}_{1,n-2} \mathbf{b}_{1,n-1}$ ,  $A_{n-1,n-1} = \mathbf{k}_{1,n-2} \cdots \mathbf{k}_{n-2,n-2} \mathbf{b}_{n-1,n-1}$  である. 最初の式の右側の等号については注意 14 を見よ.

**定理 13** ([36]). 定理 11 で定義される ZF 代数の表現は次の明示式を持つ.

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\zeta) &= Z_{0^n}(\zeta) \mathbf{k}_{1,n-1}^{\alpha_1^+} \mathbf{c}_{1,n-1}^{\alpha_1} \cdots \mathbf{k}_{n-1,n-1}^{\alpha_{n-1}^+} \mathbf{c}_{n-1,n-1}^{\alpha_{n-1}} \quad (\alpha_i^+ = \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n), \\ Z_{0^n}(\zeta) &= Y_2(\zeta) Y_3(\zeta) \cdots Y_n(\zeta). \end{aligned}$$

$n = 2$  では (41) に帰着する. 定理 13 の表現 (と (35)) を行列積 (28) に代入すると基本セクター (4.1 節参照) ではトレースは収束する.

**注意 14.** 関係式 (29) と  $\mathcal{S}(\lambda, \mu)_{\gamma, \delta}^{0,0} = \theta(\gamma = \delta = 0)$  から次の可換性が従う.

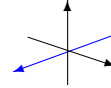
$$[Z_{0^n}(\mu), Z_{0^n}(\lambda)] = 0, \quad [V_m(\mu), V_m(\lambda)] = 0 \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

左式は (33) の  $w = 0$  項である.

## 6. 四面体方程式と行列積

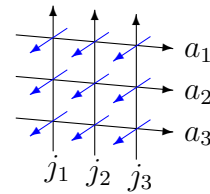
$q = 0$  の  $n$ -ASEP (例 2),  $(q, \mu) = (0, 0)$  の  $n$ -ZRP  $H_l$  (24) は, 粒子が一方にのみ遷移する完全非対称 (totally asymmetric, TA) な模型となり,  $n$ -TASEP,  $n$ -TAZRP と呼ばれる. これらの模型では, 行列積オペレーター  $X_\alpha(z)$  を四面体方程式に基づいて構成し [31, 33], 定常確率を結晶基底に関連したアルゴリズム [30, 32] によって定式化する事も出来る. 詳細を記述するスペースが無いので前者を模式図として与えておく. 一文に要約するならば, 3次元格子中のサイズ  $n \times n$  の層を転送する行列  $\mathbb{T}(z|\mathbf{a}, \mathbf{j})$  は境界条件  $\mathbf{a}, \mathbf{j}$  を混合する 2 次関係式を満たし, その  $q \rightarrow 0$  極限の中に ZF 代数の表現が実現される.

3D  $R$  or  $L$ -operators

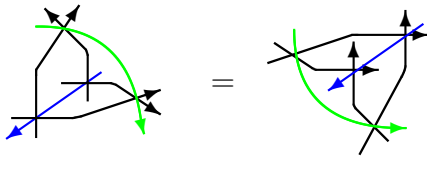


Layer transfer matrix

$\mathbb{T}(z|\mathbf{a}, \mathbf{j}) =$

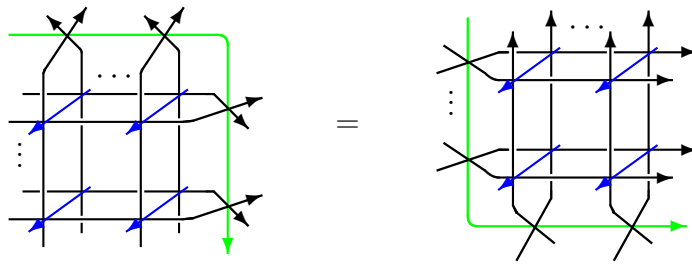


Tetrahedron equation



Bilinear relations of layer transfer matrices (generalized commutativity)

$$\sum x^* y^{**} \mathbb{T}(x|\mathbf{a}, \mathbf{j}) \mathbb{T}(y|\mathbf{a}', \mathbf{j}') = (x \leftrightarrow y)$$



$q \rightarrow 0$  limit

$$\mathbb{T}(z|\mathbf{a}, \mathbf{j}) \rightarrow \sum X_\alpha(z) \otimes (\text{frozen part})$$



ZF algebra  $X(x) \otimes X(y) = (\check{\mathcal{S}}_{q=0}) [X(y) \otimes X(x)]$

この構成法による  $X_\alpha(z)$  と定理 13 や [38] で  $q = 0$  としたものは  $n = 2$  では一致するが,  $n \geq 3$  での関係は未解明である.

## REFERENCES

- [1] C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai and T. Sawabe, Spectrum in multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 345002 (41pp).
- [2] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 832–833.
- [3] R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Dover (2007).
- [4] V. V. Bazhanov and S. M. Sergeev, Zamolodchikov’s tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups, *J. Phys. A: Math. Theor.* **39** (2006) 3295–3310.
- [5] V. Belitsky and G. M. Schütz, Quantum algebra symmetry and reversible measures for the ASEP with second-class particles, *J. Stat. Phys.* **161** (2015) 821–842.
- [6] R. A. Blythe and M. R. Evans, Nonequilibrium steady states of matrix product form: A solver’s guide, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) R333.
- [7] A. Borodin, I. Corwin and V. Gorin, Stochastic six-vertex model, *Duke Math. J.* **165** (2016) 563–624.
- [8] A. Borodin and L. Petrov, Higher spin six vertex model and symmetric rational functions, arXiv:1601.05770.
- [9] G. Bosnjak and V. V. Mangazeev, Construction of  $R$ -matrices for symmetric tensor representations related to  $U_q(\widehat{sl}_n)$ , arXiv:1607.07968.
- [10] L. Cantini, A. Garbali, J. de Gier and M. Wheeler, Koornwinder polynomials and the stationary multi-species asymmetric exclusion process with open boundaries, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2015) 444002 (32pp).
- [11] L. Cantini, J. de Gier and M. Wheeler, Matrix product formula for Macdonald polynomials, *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** (2015) 384001 (25pp).
- [12] I. Corwin, The  $q$ -Hahn Boson Process and  $q$ -Hahn TASEP, *Int Math Res Notices* (2015) 2015(14): 5577–5603.
- [13] I. Corwin and L. Petrov, Stochastic higher spin vertex models on the line, arXiv:1502.07374.
- [14] N. Crampe, E. Ragoucy and M. Vanicat, Integrable approach to simple exclusion processes with boundaries. Review and progress, *J. Stat. Mech.* (2014) P11032.
- [15] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) 1493–1517.
- [16] M. R. Evans and T. Hanney, Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) R195–R240
- [17] M. R. Evans, S. N. Majumdar and R. K. P. Zia, Factorized steady states in mass transport models, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) L275–L280.
- [18] L. D. Faddeev, Quantum completely integrable models in field theory, in *Contemporary Mathematical Physics*, Vol. IC (1980), 107–155.
- [19] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, *Ann. Probab.* **35** (2007) 807–832.
- [20] A. Garbali, J. de Gier and M. Wheeler, A new generalization of Macdonald polynomials, arXiv:1605.07200.
- [21] S. Großkinsky, G. M. Schütz and H. Spohn, Condensation in the zero range process: stationary and dynamical properties, *J. Stat. Phys.* **113** (2003) 389–410.
- [22] L-H. Gwa and H. Spohn, Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 844–854.
- [23] M. Jimbo, A  $q$ -analogue of  $U(gl(N+1))$ , Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986) 247–252.
- [24] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990).
- [25] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky, 2-Categories and Zamolodchikov tetrahedron equations, *Proc. Symposia in Pure Math.* **56**(1994) 177–259 .
- [26] C. Kipnis and C. Landim, Scaling limits of interacting particle systems, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **320**, Springer Verlag (1999).
- [27] J. Kuan, An algebraic construction of duality functions for the stochastic  $U_q(A_n^{(1)})$  vertex model and its degenerations, arXiv:1701.04468.
- [28] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Quantum spectral transform method. Recent developments. *Lect. Note. Phys.* **151** (1982) 61-119.

- [29] A. Kuniba, V. V. Mangazeev, S. Maruyama and M. Okado, Stochastic  $R$  matrix for  $U_q(A_n^{(1)})$ , Nucl. Phys. **B913** (2016) 248–277.
- [30] —, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial  $R$ , J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 34FT02 (19pp).
- [31] —, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016) 114001 (22pp).
- [32] —, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial  $R$ , J. Integrable Syst. (2016) **1** (1): xyw002.
- [33] —, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation, J. Integrable Syst. (2016) **1** (1): xyw008.
- [34] —, M. Okado, Tetrahedron equation and quantum  $R$  matrices for  $q$ -oscillator representations of  $U_q(A_{2n}^{(2)})$ ,  $U_q(C_n^{(1)})$  and  $U_q(D_{n+1}^{(2)})$ , Comm. Math. Phys. **334** (2015) 1219–1244.
- [35] —, M. Okado, Matrix product formula for  $U_q(A_2^{(1)})$ -zero range process, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 044001 (20pp).
- [36] —, M. Okado, A  $q$ -boson representation of Zamolodchikov-Faddeev algebra for stochastic  $R$  matrix of  $U_q(A_n^{(1)})$ , Lett. Math. Phys. (2016) online.
- [37] A. M. Povolotsky, On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 465205 (25pp).
- [38] S. Prolhac, M. R. Evans and K. Mallick, The matrix product solution of the multispecies partially asymmetric exclusion process, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 165004 (25pp).
- [39] N. Yu. Reshetikhin, Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras, Lett. Math. Phys. **20** (1990) 331–335.
- [40] 笹本智弘, KPZ 方程式と可積分確率相互作用系, 日本数学会 2017 年度年会 特別講演.
- [41] T. Sasamoto and M. Wadati, Stationary state of integrable systems in matrix product form, J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1997) 2618–2627.
- [42] T. Sasamoto and M. Wadati, Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 6057–6071.
- [43] F. Spitzer, Interaction of Markov processes, Adv. Math. **5** (1970) 246–290.
- [44] Y. Takeyama, A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 465203 (19pp).
- [45] Y. Takeyama, Algebraic construction of multi-species  $q$ -Boson system, arXiv:1507.02033.
- [46] C. A. Tracy and H. Widom, On the asymmetric simple exclusion process with multiple species, J. Stat. Phys. **150** (2013) 457–470.
- [47] S. R. White, Density matrix formulation for quantum renormalization groups, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2863–2866.
- [48] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1312–1314.
- [49] A. B. Zamolodchikov, Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space, Soviet Phys. JETP **79** (1980) 641–664.
- [50] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Two-dimensional factorizable S-matrices as exact solutions of some quantum field theory models, Ann. Phys. **120** (1979) 253–291.