電磁気学とベクトル解析[1]

国場敦夫 (東京大学大学院総合文化研究科)

1 Maxwell 方程式

電磁気学のハイライトは何と言っても Maxwell 方程式 [1] であろう．R.P. Feynman[2] は，自身の教科書 [3] の第一章末尾に「人類の歴史という長い眼から，たとえば今から 1 万年後の世界から眺めたら，19 世紀の一番顕著な事件が Maxwell による電磁法則の発見であったと判断されることはほとんど間違いない」と述べている [4].

Maxwell 方程式には微分形と積分形がある．媒質がない場合，前者は以下で与えられる．

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\Big(\mathbf{J} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\Big). \tag{4}$$

ここで電場を $\mathbf{E}$, 磁場を $\mathbf{B}$, 電荷密度を ρ, 電流密度 を $\mathbf{J}$ と記した．また ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率，透磁率と呼ばれる定数である．発散 div と回転 rot は次の様に定義される．

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},\\
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= \Big(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\\
&\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\Big).
\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ についても同様である．関係式 (1)–(4) は順に，Gauss の法則，Faraday の法則，磁場に関する Gauss の法則，Ampère-Maxwell の法則として知られる．

[1]数理科学 「代数的物理観」 2017 年 5 月号 pp.23-30 (サイエンス社) 掲載記事．出版社の了承を得て公開.

積分形の Maxwell 方程式は次の様に表される．

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \tag{5}$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \tag{6}$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial S} \mathbf{B} d\mathbf{r} = \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \tag{8}$$

ここで V は 3 次元の閉領域，∂V はその表面で閉曲面，S は曲面，∂S はその縁で閉曲線であり，互いに整合的に向き付けられたものである．$\int_V (\cdots) dV$ は体積積分，$\int_S (\cdots) d\mathbf{S}$ と $\int_{\partial V} (\cdots) d\mathbf{S}$ は面積分，$\oint_{\partial S} (\cdots) d\mathbf{r}$ は線積分を表し，添字が積分範囲を指定している．

電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の背後にはスカラーポテンシャル ϕ，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ があり，

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ &\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \end{aligned} \tag{9}$$

と表される．ここで勾配 grad は

$$\mathrm{grad}\,\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

により定義される．表示 (9) を (2) と (3) に代入すると，容易に確かめられる性質

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0 \tag{10}$$

のおかげで自明に満たされる．よって残るは (1) と (4) となり，方程式と未知関数 $\mathbf{A}, \phi$ が共に 4 個となってバランスする [5]．ただし Λ を任意のスカラーとするとき，ポテンシャルは $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ を不変に保つゲージ変換

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda \tag{11}$$

の分だけ不定性を持つ．

Maxwell 方程式自体のハイライトの一つは歴史的に見ても電磁波の導出であろう．その際に鍵となるのが

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta \tag{12}$$

という関係式で, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は 3 次元 Laplacian と呼ばれる偏微分作用素である．

ここまでで既に grad, div, rot, Δ という微分演算に加え，体積積分，面積分，線積分 という多重積分が登場しており，初めて接する際にはその概念の多様さに幻惑されても無理はない．実際，電磁気学の講義内容は多岐にわたり，ともすれば煩雑な印象を与えがちである．

しかしながら，Maxwell 方程式は多くの人が美しいと感じるらしい．果たして，この一見複雑な方程式系を何処から眺めると美しく映えるのだろうか．その展望台の一つが本稿の主題であるベクトル解析である．

「理論が完成した後に足場が残っていては見苦しい」とは電磁気学にも所縁の大数学者の言である [6]．磨き上げられた完成品にのみ最高の価値を賞与せんとする数学者らしい信条であり，多くの教科書もそれに沿っている [7]．しかしながら，本稿は敢えて素朴な視察から事始め，展望台に登るための足場を案内する機会にしてみたい．名言の品格に忸怩たる思いを抱きつつ．

2　積分定理からの示唆

微分形 (1) から積分形 (5) を導くには領域 V について体積積分している．同様に (2) から (6) を得るには曲面 S について面積分する．その際，左辺には以下の積分定理を適用したのであった．

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{E}\,dV = \int_{\partial V} \mathbf{E}\,d\mathbf{S}, \tag{13}$$

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E}\,d\mathbf{r}. \tag{14}$$

(13) は Gauss の定理，(14) は Stokes の定理と呼ばれる．左辺の積分領域 V, S の次元は 3, 2 であり，右辺の積分領域 $\partial V, \partial S$ はその境界なので次元は 2, 1 となって，どちらも一つずつ下がって来ている．よって次に来るのは以下の等式である．

$$\int_C \mathrm{grad}\,\phi\,d\mathbf{r} = \phi(\mathrm{P}) - \phi(\mathrm{Q}). \tag{15}$$

左辺は曲線 C に沿う線積分であり，その終点を P， 始点を Q とした．(15) は微積分の基本定理 $\int_q^p \frac{df}{dx}dx = f(p) - f(q)$ の 3 次元版であり，$\mathbf{r} = \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ での代入値を (符号付きで) 集めている右辺は自然に 0 次元の積分 $\int_{\partial C} \phi$ と見なせる．

この様に積分は，その範囲を指定する図形 $D = V, S, C$ やその境界 ∂D といった幾何学的対象物と，その上に生息する $\mathbf{E}\,d\mathbf{r}$, $\mathrm{div}\mathbf{E}\,dV$, $\mathrm{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ といった「場」，即ち $d\mathbf{r}$, dV, $d\mathbf{S}$ といった記号を併せ持つ**微分形式**が対となって値を返す操作であると捉えよう．模式的に書くと

$$\text{積分}:\ \big(\,\text{幾何学的対象物},\ \text{微分形式}\,\big) \longrightarrow \text{数}.$$

そこで (13)–(15) を一般的に

$$\int_D \omega'_k = \int_{\partial D} \omega_{k-1} \tag{16}$$

と表すと，以下の様な微分形式が登場している．

$$\begin{aligned}
\omega'_3 &= \mathrm{div}\mathbf{E}\,dV \\
&= \Big(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz, \\
\omega_2 &= \mathbf{E}\,d\mathbf{S} \\
&= E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy, \\
\omega'_2 &= \mathrm{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{S} \\
&= \Big(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\Big) dy \wedge dz \\
&+ \Big(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\Big) dz \wedge dx \\
&+ \Big(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\Big) dx \wedge dy, \\
\omega_1 &= \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz, \\
\omega'_1 &= \mathrm{grad}\,\phi\,d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz, \\
\omega_0 &= \phi.
\end{aligned}$$

体積要素を $dV = dx \wedge dy \wedge dz$，面積要素ベクトルを $d\mathbf{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$，線素を $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ と書いた．記号 $\mathbf{E}\,d\mathbf{r}$ 等は 3 次元ベクトルの通常の内積である．ω_k, ω'_k は k 次元の図形上で積分される事を示しており，**k-形式**という．

wedge 記号 $\wedge$ を説明するため，上の ω_2 を用いて $\epsilon_0\omega_2 = \epsilon_0\mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ を考え，その第 3 項 $\epsilon_0 E_z dx \wedge dy$ に注目しよう．これは xy 面内の面積 $dxdy$ の窓を，右手系で x 軸から y 軸に右ねじを回した時に進む $+z$ 向きに貫く電束と解釈できる．同様に y 軸から x 軸に右ねじを回した時に進む向きに貫く電束を $\epsilon_0 E_z dy \wedge dx$ と書くなら，両者は自明に (-1) 倍なので，$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ と約束しておけばよい．この様に $\wedge$ は向きを整合的に取り入れるのに適した積で，同様に $dy \wedge dz = -dz \wedge dy, dz \wedge dx = -dx \wedge dz$ とし，反対称性から $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ と定める．さらに体積要素についても $dV = \pm da \wedge db \wedge dc$ とし，符号は (a, b, c) が (x, y, z) の偶置換のとき $+$，奇置換のとき $-$ と約束する．以上と双線形性により微分形式どうしの間に定義される積 $\wedge$ を**外積**という．例として，磁場についての 1-形式

$\beta_1 = B_x dx + B_y dy + B_z dz$ も用いると

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{\epsilon_0}{2}\int (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dV,$$
$$\frac{1}{\mu_0}\int \omega_1 \wedge \beta_1 = \frac{1}{\mu_0}\int (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{S}$$

等となる．第一式は電場のエネルギーである．第二式の $\mathbf{E}\times\mathbf{B} = (E_yB_z - E_zB_y, E_zB_x - E_xB_z, E_xB_y - E_yB_x)$ は 3 次元ベクトルの意味での外積で，Poynting ベクトルによる電磁場のエネルギー流束を表す．

さて x, y, z の関数 ϕ に対して $\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$ を $d\phi$ と書く習わしは熱力学でもお馴染みであろう．今の例では $\omega_1' = d\omega_0$ に該当する．d を他の ω_k, ω_k' にも作用する線形な作用素，**外微分**に一般化しよう．計算規則は以下のとおり．

$$\begin{aligned}
&d(Xdx + Ydy + Zdz)\\
&= (dX)\wedge dx + (dY)\wedge dy + (dZ)\wedge dz,\\
&d(Xdy\wedge dz + Ydz\wedge dx + Zdx\wedge dy)\\
&= dX\wedge dy\wedge dz + dY\wedge dz\wedge dx + dZ\wedge dx\wedge dy,\\
&d(Wdx\wedge dy\wedge dz) = (dW)\wedge dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

例えば $d\omega_1$ は次の様に計算される．

$$\begin{aligned}
d\omega_1 = &\Big(\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\Big)\wedge dx\\
&+ \Big(\frac{\partial E_y}{\partial x}dx + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy + \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\Big)\wedge dy\\
&+ \Big(\frac{\partial E_z}{\partial x}dx + \frac{\partial E_z}{\partial y}dy + \frac{\partial E_z}{\partial z}dz\Big)\wedge dz\\
= &\Big(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\Big)dy\wedge dz\\
&+ \Big(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\Big)dz\wedge dx\\
&+ \Big(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\Big)dx\wedge dy = \omega_2'.
\end{aligned}$$

性質 $dx\wedge dx = 0, dy\wedge dx = -dx\wedge dy$ 等を用いた．一般に次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&d(\mathbf{E}\,d\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{S},\quad d\phi = \mathrm{grad}\,\phi\,d\mathbf{r}\\
&d(\mathbf{E}\,d\mathbf{S}) = \mathrm{div}\,\mathbf{E}\,dV.
\end{aligned} \tag{17}$$

ゆえに $d\omega_2 = \omega_3'$ である．結局 $d\omega_{k-1} = \omega_k'$ が $k = 1, 2, 3$ で成り立つので (16) は次の様に表される．

$$\int_D d\omega_{k-1} = \int_{\partial D}\omega_{k-1}. \tag{18}$$

$D, \partial D$ は k 次元の積分領域とその境界で整合的に向き付けられたものである．3 つの積分定理 (13)–(15) が一つの定理にまとまった．外微分は $d^2 = 0$ という基本性質を持つ．実際 $d^2\omega_{k-1} = d\omega'_k = 0$ が成り立つが，これは (10) に他ならない．

k-形式と $(3-k)$-形式を結び付ける操作も極めて有用である．それには入れ換え

$$dx \leftrightarrow dy \wedge dz, \quad dy \leftrightarrow dz \wedge dx,$$
$$dz \leftrightarrow dx \wedge dy, \;\; 1 \leftrightarrow dx \wedge dy \wedge dz$$

により定義される線形変換が活躍する．これを $*$ と記し，**共役** (又は Hodge $*$ 作用素) と呼ぶ．定義から

$$*(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) = \mathbf{E}\, d\mathbf{S}, \quad *\phi = \phi\, dV \tag{19}$$

となり，$*^2$ は恒等変換なので $*(\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$, $*(\phi\, dV) = \phi$ も成り立つ．

さて $d^2 = 0$, $*^2 = 1$ なので交互に作用させてみたくなる．(17)，(19) を用いて順次実行すると

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{S}, \\
*\, d(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{r}, \\
d * d(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{S}, \\
* \, d * d(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

同じ $\mathbf{E}\, d\mathbf{r}$ から出発して今度は逆順にやってみる．

$$\begin{aligned}
*(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathbf{E}\, d\mathbf{S}, \\
d * (\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{div}\,\mathbf{E}\, dV, \\
* \, d * (\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{div}\,\mathbf{E}, \\
d * d * (\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) &= \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\, d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

それぞれの最後の行の差をとり (12) を用いると Laplacian が $(d * d * - * d * d)(\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{E}\, d\mathbf{r}$ と捉えられる事が分かる．以上は $\mathbf{E}\, d\mathbf{r}$ という 1-形式についての結果だが，一般の k-形式 に対しても同様に $d{*}d{*} - {*}d{*}d = (-1)^{k-1}\Delta$ が成り立つ．確かめられたい．

3　n 次元の場合：外積代数

前節の内容は自然に n 次元に一般化される．$x_1, \ldots, x_n$ を n 個の実変数とし，微分形式の集合

$$\Omega^k = \Big\{ \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n} f_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \Big\}$$

を導入する．ここで $0 \le k \le n$ であり，k がこの範囲外の時は $\Omega^k = 0$ と了解する．$f_{i_1,\dots,i_k} = f_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_n)$ は $x_1,\dots,x_n$ の実関数で任意回微分できるものとする．$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ は，添字 $(i_1,\dots,i_k)$ に重複がある時 0 とし, 重複がない時は置換 σ による並べ換えについて

$$\begin{aligned} &dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{\sigma(k)}} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

を満たす記号とする．ここで $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ は置換 σ の符号．Ω^k は $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} | 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ を基底とする $\dim \Omega^k = \binom{n}{k}$ 次元のベクトル空間と見なせる．Ω^k の元 $\alpha = \sum f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ を k-形式という．和は $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ に制限して一般性を失わない．今後その様な和を単に $\sum$ と書く．

外積 $\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \to \Omega^{k+l}$ と外微分 $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \sum f_{i_1,\dots,i_n} g_{j_1,\dots,j_l} \\ &\quad \times dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}, \\ d\alpha &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_n}}{\partial x_j} dx_j \Big) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

ここで $\beta = \sum g_{j_1,\dots,j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \in \Omega^l$ とした．定義から容易に

$$\begin{aligned} &d^2 = 0, \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \\ &d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \end{aligned} \tag{20}$$

が確認できる．$\omega_k \in \Omega^k$ に対し，積分定理 (18) も ∂D を然るべく定義すればそのまま成り立つ [8]．特に $n = 2, k = 2$ の場合は Green の公式として知られる．(20) の第一式は任意の $\alpha \in \Omega^k$ に対して $d(d\alpha) = 0$ が成り立つ事を意味する．逆に $d\alpha = 0$ を満たす任意の $\alpha \in \Omega^k$ に対して $\alpha = d\gamma$ となる $\gamma \in \Omega^{k-1}$ が存在することが知られている (Poincaré の補題 [9])．$n = 3$ では $\mathrm{rot}\,\mathbf{X} = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{Y} = 0$ の時，それぞれ $\mathbf{X} = \mathrm{grad}\,\psi$, $\mathbf{Y} = \mathrm{rot}\,\mathbf{Z}$ となる ψ, $\mathbf{Z}$ が存在するという事実に帰着する．

直和 $\Omega^0 \oplus \cdots \oplus \Omega^n$ には $\wedge$ により積構造が入り，2^n 次元の代数になる事に注意しよう．これは**外積代数** (又は Grassmann 代数，1844 年) の例になっている．

次に共役 $* : \Omega^k \to \Omega^{n-k}$ を導入しよう．これは内積 $(\ ,\ ) : \Omega^1 \times \Omega^1 \to \mathbb{R}$ の入れ方に応じて決まる仕組みになっている．内積自体は基底に対する値 (計量という) を指定すれば十分で，ここでは次節での用途のため $(dx_i, dx_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ ととる．ただし $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n = \pm 1$ は任意に固定された符号である．これに連

動して Ω^k の内積は，基底に対して以下で与えられる．

$$(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}) \\ = \begin{cases} \varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_k}\,\mathrm{sgn}(\sigma) & (\forall j_s = i_{\sigma(s)} \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}.$$

一般の ε_i では定符号ではないが，非退化である．以上で内積が定まった．k-形式 $\alpha\in\Omega^k$ の共役 $*\alpha\in\Omega^{n-k}$ は，任意の $\beta\in\Omega^{n-k}$ に対して

$$\alpha\wedge\beta = (*\alpha,\beta)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \tag{21}$$

が成り立つという条件で特徴付けられる．$*\alpha$ は α の「補集合的微分形式」だという気持ちが汲み取れるだろうか．実践的には基底に対する明示式

$$*(dx_I) = \varepsilon_{\bar{I}}\,\mathrm{sgn}(I,\bar{I})dx_{\bar{I}} \tag{22}$$

が有用である．ここで $I,\bar{I}$ は $I\cup\bar{I} = \{1,\ldots,n\}$ を満たす任意の添字列 $I=(i_1,\ldots,i_k)$，$\bar{I}=(j_1,\ldots,j_{n-k})$ であり，$dx_I = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$, $dx_{\bar{I}} = dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}}$，$\varepsilon_{\bar{I}} = \varepsilon_{j_1}\cdots\varepsilon_{j_{n-k}}$ と書いた．また $\mathrm{sgn}(I,\bar{I})$ は $(I,\bar{I})$ を $(1,\ldots,n)$ の置換と見なした時の符号である．任意の $\alpha,\beta\in\Omega^k$ について $*\alpha\wedge\beta = *\beta\wedge\alpha$ が成り立つ．また $**$ は任意の k-形式を $(-1)^{k(n-k)}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 倍する作用素になる．

前節の設定は $n=3$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$ に該当し，定数 a により $*(dx_2\wedge dx_1) = a\,dx_3$ となる事は明らかである．これを特徴付けの式 (21) に代入し，$\beta = dx_3$ の場合を書き下せば $dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3 = (adx_3, dx_3)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ となって $a=-1$ が従う．これは (22) による $*(dx_2\wedge dx_1) = \mathrm{sgn}(213)dx_3$ と一致する．

最後に Laplacian について述べよう．(22) と同様の記法で一般に $\sum_I f_I dx_I\in\Omega^k$ を k-形式とする．和は $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合 I で k 個の元からなるものにわたる．次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &(d*d*+(-1)^n*d*d)\sum\nolimits_I f_I dx_I \\ &= (-1)^{n(k-1)}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum\nolimits_I(\Delta f_I)dx_I, \\ \Delta &= \sum\nolimits_{i=1}^n \varepsilon_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

$n=3, \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$ の時，前節の結果と一致している．微分形式に対して $\Delta(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I(\Delta f_I)dx_I$ とし，外微分の形式的随伴 $\delta = (-1)^{n(k-1)}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n*d*:\Omega^k\to\Omega^{k-1}$ を導入すると [10]，上の結果は

$$\Delta = d\delta+\delta d \tag{24}$$

と言い換えられる [11]．$d^2=\delta^2=0$ ゆえ Laplacian は d,δ と可換である．d と δ の 3 つ以上の積 $d\delta d, \delta d\delta, \delta d\delta d$ 等は (24) により $d\Delta^j, \delta\Delta^j, d\delta\Delta^j$ $(j\geq 1)$

に帰着する．また関数 f，即ち 0-形式に対しては δ は 0 なので $\Delta f = \delta df$ であり，前節の設定では $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$ を再現する．

4 Maxwell 方程式再び

前節の枠組みで $n = 4$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, 1, 1, -1)$ の場合を用い，Maxwell 方程式を再定式化しよう．今後は適宜 $\wedge$ を略し，$dx_1 \wedge dx_4$ を単に $dx_1 dx_4 = -dx_4 dx_1$ 等と書く．変数 (x_1, x_2, x_3, x_4) を時空の座標 (x, y, z, ct) と同一視する．ただし $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は真空中の光速である．Ω^1 の基底の内積で 0 でないのは

$$\begin{aligned}&(dx, dx) = (dy, dy)\\&= (dz, dz) = -c^2(dt, dt) = 1\end{aligned} \tag{25}$$

だけで，Minkowski 計量という [12]．共役 $*$ は (22) から例えば $*(dx_1 dx_2) = -\operatorname{sgn}(1234) dx_3 dx_4$ となるが，これは 2 節の $d\mathbf{r}, d\mathbf{S}$ を用いれば $* d\mathbf{S} = -c d\mathbf{r} dt$ の z 成分のことである．同様に

$$\begin{aligned}&* d\mathbf{r} = -c\, d\mathbf{S}\, dt, && * dt = -c^{-1} dV,\\&* d\mathbf{S} = -c\, d\mathbf{r}\, dt, && * (d\mathbf{r}\, dt) = c^{-1} d\mathbf{S},\\&* (d\mathbf{S}\, dt) = -c^{-1} d\mathbf{r}, && * dV = -c\, dt,\\&* (dV dt) = c^{-1}\end{aligned}$$

と表せる．$d\mathbf{S}\, dt = dt\, d\mathbf{S}$，$d\mathbf{r}\, dt = -dt\, d\mathbf{r}$ 等に注意しよう．

以下では 1-形式 $Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 + f dx_4$ を $\mathbf{Y}\, d\mathbf{r} + cf dt$ と書き，2-形式 $Y_1 dx_2 dx_3 + Y_2 dx_3 dx_1 + Y_3 dx_1 dx_2 + (Z_1 dx_1 + Z_2 dx_2 + Z_3 dx_3) dx_4$ を $\mathbf{Y}\, d\mathbf{S} + c\mathbf{Z}\, d\mathbf{r}\, dt$ 等と記す．同様に 3-形式は dV と $d\mathbf{S}\, dt$ の線形結合であり，4-形式は $dV\, dt$ のスカラー倍である．外微分は次の様になる．

$$\begin{aligned}&df = (\operatorname{grad} f) d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt,\\&d(\mathbf{Y}\, d\mathbf{r} + f dt)\\&= (\operatorname{rot} \mathbf{Y}) d\mathbf{S} + \Big(\operatorname{grad} f - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}\Big) d\mathbf{r}\, dt,\\&d(\mathbf{Y}\, d\mathbf{S} + \mathbf{Z}\, d\mathbf{r}\, dt)\\&= (\operatorname{div} \mathbf{Y}) dV + \Big(\operatorname{rot} \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}\Big) d\mathbf{S}\, dt,\\&d(\mathbf{Y}\, d\mathbf{S}\, dt + f dV) = \Big(\operatorname{div} \mathbf{Y} - \frac{\partial f}{\partial t}\Big) dV dt.\end{aligned}$$

準備の仕上げとして Laplacian (23) を書き下しておく．$n = 4$ なので気分を変えて Δ の代わりに $\Box$ と書き，d'Alembertian と呼ぶ．任意の k-形式に対

して次の等式が成り立つ．

$$d*d*+*d*d = -\Box, \tag{26}$$
$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

前節最後の注意から，関数 Λ に対しては $*d*d\Lambda = -\Box\Lambda$ が成り立つ．

漸く本題に入る．Maxwell 方程式と $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{A}, \rho, \phi$ (1) – (9) を思い出そう．我々に必要なのは，これら登場人物を次の様に配置した微分形式である．

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{A}\,d\mathbf{r} - \phi\,dt \in \Omega^1,\\
*A &= -c\mathbf{A}d\mathbf{S}\,dt + c^{-1}\phi\,dV \in \Omega^3,\\
F &= \mathbf{B}\,d\mathbf{S} + \mathbf{E}\,d\mathbf{r}\,dt \in \Omega^2,\\
*F &= c^{-1}\mathbf{E}\,d\mathbf{S} - c\mathbf{B}d\mathbf{r}\,dt \in \Omega^2,\\
J &= c(\mathbf{J}\,d\mathbf{S}\,dt - \rho\,dV) \in \Omega^3,\\
*J &= -\mathbf{J}\,d\mathbf{r} + c^2\rho\,dt \in \Omega^1.
\end{aligned}$$

F は電磁場，A はポテンシャル，J は電流電荷密度から構成されている．先の公式から

$$\begin{aligned}
dF &= (\operatorname{div}\mathbf{B})dV + \Big(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Big)d\mathbf{S}\,dt,\\
d*F &= c^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{E})dV\\
&\quad - c\Big(\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\Big)d\mathbf{S}\,dt.
\end{aligned}$$

従って Maxwell 方程式の第一組 (2)，(3) と第二組 (1)，(4) は各々次の方程式と等価である．

$$dF = 0, \quad d*F = -\mu_0 J. \tag{27}$$

左の式は $F \in d\Omega^1$ である事を示す．実際

$$dA = (\operatorname{rot}\mathbf{A})d\mathbf{S} - \Big(\operatorname{grad}\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\Big)d\mathbf{r}\,dt$$

であるが，(9) によりこれは

$$F = dA \tag{28}$$

を与えている．$d^2 = 0$ なので Λ を任意のスカラーとして $A \to A + d\Lambda$ としても同じ F を与えるが，これはポテンシャルのゲージ変換 (11) に他ならない．$F = dA$ のもとでは $dF = 0$ は自明化するので，結局 (27) の第二式に代入した

$$d*dA = -\mu_0 J \tag{29}$$

に帰着される．さらに d を作用させると $d^2 = 0$ から $dJ = 0$ が従うが，一方で $dJ = c(\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t})dV dt$ なので電荷保存を表す連続の式が得られる．また両辺の $*$ をとり，(26) を用いると次の方程式と等価になる．

$$\Box A + d * d * A = \mu_0 * J. \tag{30}$$

ここに現れた $* d * A$ を計算してみると

$$-(* d * A) = \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となり，これが 0 となる条件を Lorenz (Lorentz とは別人 [1]) 条件という．幸か不幸か，Lorenz 条件はゲージ変換 $A \to A + d\Lambda$ で不変ではなく (26) の下の注意から $\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Box\Lambda = 0$ に変わる．一般に Λ はこれを満たす様にとれるので, A は Lorenz 条件を満たすと仮定してもよい．まとめると，Maxwell 方程式はポテンシャル 1-形式に関する (29) あるいはそれと等価な (30) に集約され，特に Lorenz ゲージを採用して

$$\Box A = \mu_0 * J, \quad d * A = 0$$

としてもよい．その場合ゲージ変換 $A \to A + d\Lambda$ の自由度は $\Box\Lambda = 0$ を満たす Λ に限られる．第一式は良く知られた波動方程式 $\Box\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$, $\Box\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ である．

5 覚醒

Maxwell 方程式が (27) あるいは (29) に集約され,「なんとなく」スッキリしたかもしれない．このスッキリ感の本質を見定めよう．そのために遅まきながら外微分の最も基本的な性質を喚起する．変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の関数 $f = f(x)$ の外微分は $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ であった． f に $x_i = x_i(y)$ を代入して $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の関数 $f = f(x(y))$ と引き戻してみると $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$ となる．ここで i の和は偏微分の鎖規則により $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j}$ となるから $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i$ を得る．単純ながら以上の観察は，外微分 d とは変数の取り方によらない概念だという本質を語っている．一般の k-形式でも同様である．我々は外微分の他に Minkowski 計量 (25) を固定し，それに準拠した $*$ も用いた．以上から，Minkowski 計量を変えない変数変換 (Lorentz 変換という) に限ればここで定式化された微分形式の関係式はどんな変数 (座標) で具体的に表示しても等価となる．つまり (27) や (29) が特殊相対性理論の基本的要請，Lorentz 変換に関する共変性，を満たす事は自動的に組み込まれたのである．座標 (今の場合は慣性系) の取り方によらない基本法則は，それ相応の様式で書き下したい．前節ではそれが達成されたゆえにスッキリしたのである．

6　結語

Maxwell 方程式は作用

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{c}\int\Big(\frac{1}{2\mu_0} * F \wedge F - J \wedge A\Big) \\
&= \int\Big(\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} - \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \mathbf{JA} - \rho\phi\Big) dV dt
\end{aligned}
$$

に対する変分原理 $\delta S = 0$ から導かれる [13]．実際 (28) を代入し，(22) の後の注意と (20) を用いると $\delta \int *F \wedge F = 2\int *dA \wedge d\delta A = -2\int d * dA \wedge \delta A$ が示せる．ゆえに $\delta S = -(c\mu_0)^{-1}\int(d * dA + \mu_0 J) \wedge \delta A$ となって (29) が従う．実は作用を $S = \int \mathcal{L}(A, J)$ と置き，1-形式のゲージ変換 $A \to A + d\Lambda$ で S は不変であると要請すると，4-形式 $\mathcal{L}(A, J)$ は本質的に上記の形に決まってしまう．この様にゲージ変換を内包し，それにより統制される理論をゲージ理論という．

電磁気学は人類が初めて手にした記念すべきゲージ理論である．歴史上数え切れないほどの先人の努力と苦闘が結晶化した足場を登り展望台に立った時，それを集約するのはたった一行のゲージ不変な作用 $S = \frac{1}{c}\int(\frac{1}{2\mu_0} * dA \wedge dA - J \wedge A)$ となった [14]．見る者の「琴線に触れる」とはこの式の事だろうか．自然現象にインスピレーションを求めるのが理論物理学とすれば，数理構造にそれを見出すのは数理物理学だと言った友人がいる．電磁気学はその後幾多のゲージ理論の手本となり出発点となった．Maxwell 理論の向こうに更なる景色が見え始めたこの辺りで読者とお別れしよう．

本稿の執筆に際し，貴重な御意見をいただいた井上玲氏，堺和光氏，鈴木淳史氏，竹川敦氏に感謝いたします．

注と参考文献

[1] 太田浩一，「マクスウェルは世界を変えた，電気力学小史：アンペールからアインシュタインまで」，数理科学 **455** (2001)．Maxwell の論文 (1864) にはポテンシャルや電気抵抗までが混在した 8 組もの方程式が並ぶ．ポテンシャルを消去して現在の形に仕上げたのは Heaviside(1885) と Hertz(1890) である．

[2] 経路積分や Feynman 図の発明等，量子電磁力学への独創的な貢献により，朝永振一郎，J. Schwinger と共に 1965 年度 Nobel 物理学賞受賞．

[3] R. P. Feynman, R. Leighton, M. Sands, ファインマン物理学 III 電磁気学, 宮島龍興訳，岩波書店 (1969).

[4] London の Westminster 寺院には，Newton がその下に眠る大パネルの周りに，Maxwell, Kelvin, Dirac 等，英国人科学者のパネルが配置され

ており，見学者はその上を歩く事ができる．ちなみに 19 世紀は熱力学成立の快挙も記憶されるべきであろう．

[5] ランダウ=リフシッツ, 場の古典論, 恒藤俊彦，広重徹訳，東京図書 (1978) では, この事情を反映して (2), (3) を「第一の組」，(1), (4) を「第二の組」と呼び，別けて扱っている．

[6] 高木貞治，近世数学史談・数学雑談，共立出版 (復刻版 1996)．p28 に著者が「... 文書は足場の暴露」と胸踊らせている様子が窺える．

[7] H. フランダース，微分形式の理論，岩掘長慶訳，岩波書店 (1967)，志賀浩二，ベクトル解析 30 講，朝倉書店 (1989) 等は物理の学徒にも親しみやすい．

[8] 単に「Stokes の定理」と呼ばれる事が多い．

[9] 一般の多様体の場合には，1 点に変形可能 (可縮) という条件がいる．

[10] $\int(d\alpha,\beta)=\int(\alpha,\delta\beta)$ に適合する標準的な定義 $\delta=(-1)^{nk+n+1}*d*$ とは符号を変えている．

[11] 第 1 項では $d:\Omega^{k-1}\to\Omega^k$，$\delta:\Omega^k\to\Omega^{k-1}$，第 2 項では $d:\Omega^k\to\Omega^{k+1}$，$\delta:\Omega^{k+1}\to\Omega^k$ だが簡単のため同じ記号を用いている．

[12] 通常は Ω^1 の双対空間の基底どうしの内積を計量という．

[13] ここで変分を表す δ と (24) の δ は関係ない．

[14] 電磁場以外に荷電粒子が存在する系ではその寄与も作用に加わる．