

練習問題 1

[1]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c} \quad (1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c}) \quad (2)$$

を証明せよ．(1) は $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ と一致するか？

[2] 位置ベクトル $\vec{r}$ の成分が

$$x = r_0 e^{\alpha t} \cos \omega t, \quad y = r_0 e^{\alpha t} \sin \omega t, \quad z = 0 \quad (3)$$

で与えられる運動について考察しよう．ただし r_0, α, ω は定数とする．

(1) どのような動きを表しているか，運動の軌跡を図示してみよ．

(2) 速度 $\vec{v}$ ，加速度 $\vec{a}$ ，角運動量 $\vec{l} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ を計算せよ．

以下常に $z = 0$ であるとし，ベクトルは xy 成分からなる 2 次元のものを考える． $\vec{r}$ に平行な単位ベクトル $\vec{e}_r$ と $\vec{r}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}_\theta$ を

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (4)$$

と定める．2 次元ベクトル $\vec{b}$ を (4) により一意的に展開する式

$$\vec{b} = b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta \quad (5)$$

により，その動径成分 b_r と角度成分 b_θ を定義する．

(3) 速度，加速度についてそれぞれの動径成分と角度成分の値を求めよ．

解答例

[1] 正直に計算すれば証明できる．ここでは技巧をひとつを紹介する．これは力学の習得に必ず必要なものではないが，見通しがよく，電磁気で出てくる多くのベクトル解析の公式も同様に証明できる．

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について，内積は $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ である．これを単に $a_i b_i$ と書くことにしよう．つまり同じ添え字が現れたら 1, 2, 3 にわたる和を実行するものと了解する（アインシュタインの規約という）この規約のもとに外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の第 i 成分は

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (6)$$

とかける．ここで ε_{ijk} は数で，添え字が同じものがある場合は 0，すべての添え字が異なる場合は $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$ と値を定める．たとえば $(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$ という具合． ε_{ijk} は添え字を偶置換しても不変で，奇置換すると符号を変える．外積の成分が添え字 123 について巡回的になっていることに注意．ここで，

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (7)$$

$$\text{ただし } \delta_{ij} = 1 (\text{for } i = j), \delta_{ij} = 0 (\text{for } i \neq j) \quad (8)$$

が成り立つ．(7) がポイント．規約により $\delta_{jm} a_j = a_m$ などとなる．(1) について．

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} a_j (\varepsilon_{klm} b_l c_m) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= a_m c_m b_i - a_j b_j c_i = \left((\vec{a}, \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b}) \vec{c} \right)_i \quad \text{証了} \end{aligned}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ であり，この右辺は $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ で a, b, c を c, a, b に置き換えて符号を変えたものなので

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c}, \vec{a}) \vec{b} - (\vec{c}, \vec{b}) \vec{a} \quad (9)$$

となって違うベクトルを与える．(2) について．

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i \\ &= (\varepsilon_{ijk} a_j b_k) (\varepsilon_{ilm} c_l d_m) \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= (a_j c_j) (b_k d_k) - (a_j d_j) (b_k c_k) = \text{右辺} \quad \text{証了} \end{aligned}$$

[2]

(1) $\alpha < 0$ ならば原点に向かってスパイラルに漸近していく． $\alpha > 0$ ならば逆にスパイラルに遠ざかる． $\alpha = 0$ なら角速度 ω の等速円運動．

(2)

$$\begin{aligned}\vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \alpha r_0 e^{\alpha t} \cos \omega t - \omega r_0 e^{\alpha t} \sin \omega t \\ \alpha r_0 e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega r_0 e^{\alpha t} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t} \cos \omega t - 2\omega \alpha r_0 e^{\alpha t} \sin \omega t \\ (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t} \sin \omega t + 2\omega \alpha r_0 e^{\alpha t} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{l} = m(\vec{r} \times \vec{v}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega r_0^2 e^{2\alpha t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) 速度と加速度の動径成分と角度成分への分解を $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$, $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$ と書くと

$$v_r = \alpha r_0 e^{\alpha t}, \quad v_\theta = \omega r_0 e^{\alpha t}, \quad (10)$$

$$a_r = (\alpha^2 - \omega^2) r_0 e^{\alpha t}, \quad a_\theta = 2\omega \alpha r_0 e^{\alpha t}. \quad (11)$$

話をはっきりさせるため $r_0 > 0, \omega > 0$ としよう． α が正でスパイラルに原点から遠ざかる運動でも $0 < \alpha < \omega$ ならば $a_r < 0$ であることに注意．同様に α が負でスパイラルに原点に近づく場合でも $|\alpha| > \omega$ ならば $a_r > 0$ である．これは不思議ではないか直感に尋ねてみよう．

$\alpha = \pm\omega$ の場合は加速度は動径成分を持たない．また $\alpha = 0$ の等速円運動の場合は $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ というよく知られた結果を再現している．