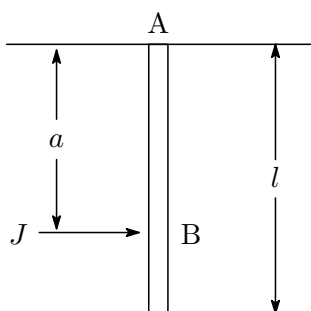


練習問題 10

図のように，質量 m ，長さ l の細くて一様な棒が点 A でつるされている．以下，角運動量と力のモーメントは点 A を基準とする．

- (i) 点 A の周りの慣性モーメント I を求めよ．
- (ii) 図の点 B に水平に撃力¹を及ぼす．これにより棒に与えられる力のモーメント $\vec{M}$ の向きを答えよ．
- (iii) 点 A と点 B の距離を a ，撃力が及ぼした力積の大きさを J とする．モーメントの時間積分 $\int \vec{M} dt$ の大きさを求めよ．
- (iv) 撃力の作用の直後の棒の角速度 ω を求めよ．
- (v) 点 B における作用の結果として，棒は一般に点 A においても力積を受ける．その大きさ J' を求めよ．
- (vi) $J' = 0$ とするためには点 B はどこに取ればよいか．



¹きわめて短い時間 Δt だけ働くが，大きさ F は非常に大きいので，運動量に有限の変化 $|F\Delta t|$ （力積という）をもたらすもの．

解答例

(i)

$$I = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{ml^2}{3}.$$

(ii) 撃力の大きさを $\vec{F}$ とかくと、それは図で右向きである。よってモーメント $\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$ は紙面から手前にむかう $\odot$ 向き。

(iii) 力積の定義から、その大きさは $J = \int F dt$ 。(ii) によりモーメントの大きさは $M = aF$ 。よって

$$\int M dt = a \int F dt = aJ$$

(あるいは簡略して $J = F\Delta t$ として、 $M\Delta t = aF\Delta t = aJ$ としてもよい。)

(iv) 一般に、角運動量 $\vec{L}$ の時間変化率 = 力のモーメントであった。式で書くと

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \text{あるいは両辺を時間で積分して } \vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt$$

撃力を及ぼす直前と直後の時刻を t_0, t_1 とすると上式の $\odot$ 方向の成分は $I\omega - 0 = aJ$ 、従って

$$\omega = \frac{Ja}{I} = \frac{3Ja}{ml^2}$$

(v) 棒の重心の初速度は $v = \frac{l\omega}{2}$ 。従って棒の得た全運動量は $mv = \frac{ml\omega}{2}$ 。これは棒の受けた全力積に等しいはず。ゆえに

$$J + J' = \frac{ml\omega}{2}$$

これを解いて

$$J' = \frac{ml\omega}{2} - J = J \left(\frac{3a}{2l} - 1 \right)$$

(vi) (v) の結果から

$$a = \frac{2l}{3}$$

点 A において働く力は、 a がこの値より大きいときは右向き、小さいときは左向きである。

撃力を扱っているので、この問題に重力は影響しない。どこにも g というパラメータは見当たらない。それならこの結果は摩擦のないテーブル上の細いペンにも当てはまるはず。さっそく試してみよう。