

練習問題 2

[1] 少年野球のコーチは野手にバウンドを気にせず一塁に送球するように指導することがある.

(1) 初速度の大きさ v , 仰角 θ でボールを投げ, 水平距離 L , 高さは元と同じ地点にノーバウンドで到達させるのに要する時間 t_0 , を求めよ. ただし, 空気抵抗は無いものとする.

(2) もしバウンドしてもその効果が速度の鉛直成分が -1 倍になるだけとすると, 水平距離 L の一塁ベース上に高さを気にせずに送球するための最短時間 t_1 はいくらか.

(3) 初速 $v = 100\text{km/h}$ で 水平距離 $L = 25\text{m}$ 送球するとし, 重力加速度を $g = 10\text{m/s}^2$ として $t_0 - t_1$ を概算せよ.

数値計算には $|\delta| < 1$ のとき近似式

$$\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{16} - \frac{5\delta^4}{128} + \frac{7\delta^5}{256} + O(\delta^6) \quad (1)$$

($O(\delta^n) = \delta^n$ 以上に比例する補正項) を用いるとよい.

[2] 静止した質量 m の質点を放し, 落下させる. 速さ v の 2 乗に比例する抵抗 $m\gamma v^2$ を受けるとする.

(1) 終端速度の大きさを求めよ.

(2) 運動方程式を解いて, 落下開始後の任意の時刻 t における質点の速さ, 位置を求めよ.

(3) 落下を開始した瞬間から終端速度で運動する別の物体との距離は $t \rightarrow \infty$ の極限でどうなるか.

解答例

[1] L, v が与えられたという設定である.

(1) 水平方向, 鉛直方向に分解して運動を考えると到達に要する時間はそれぞれ

$$t = \frac{L}{v \cos \theta}, \quad t = \frac{2v \sin \theta}{g}. \quad (2)$$

この二つの時間を等しいとおくと以下の方程式を得る.

$$\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) = \left(\frac{Lg}{2v^2} \right)^2. \quad (3)$$

ノーバウンドで到達させられるためにはこれが実根を持つ必要がある. そこで以下では無次元の量

$$\delta = \frac{Lg}{v^2} \quad (4)$$

を導入し, $0 < \delta < 1$ と仮定する. このとき (3) を解いて

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1+\delta} \pm \sqrt{1-\delta}}{2}. \quad (5)$$

プラス符号に対応する大きい $\sin \theta$ の値は「山なり」の送球である. 通常のノーバウンド送球はマイナス符号の $\sin \theta$ の値に対応すると考えてよい. 従って (2) に代入して

$$t_0 = \frac{v}{g} \left(\sqrt{1+\delta} - \sqrt{1-\delta} \right) \simeq \frac{v}{g} \left(\delta + \frac{\delta^3}{8} \right) = \frac{L}{v} \left(1 + \frac{\delta^2}{8} + \frac{7\delta^4}{128} \right) \quad (6)$$

参考までに, もし $|\delta| \ll 1$ であれば $\theta \simeq \delta/2$ となる.

(2)

$$t_1 = \frac{L}{v} \quad (7)$$

(3) 時速 100km はおよそ $v = 27.8\text{m/s}$ である. また $\delta = 0.324$.

$$t_0 - t_1 = \frac{L}{v} \left(\frac{\delta^2}{8} + \frac{7\delta^4}{128} \right) \simeq 0.0124 \text{ sec} \quad (8)$$

この間ボールはおよそ距離 $v(t_0 - t_1) \simeq 34\text{cm}$ 進む. 参考までに近似式 (1) を用いずに (6) の最初の式を用いてコンピューターに計算させると $t_0 - t_1 = 0.0123883\ldots\text{sec}$ となる.

以上から力学による結論は, もしグラウンドが十分硬くなめらかで, 一塁手がどんな高さの送球でもエラーしない名手であれば, バウンドを気にせず全力で水平に送球すると 100 分の 1 秒程度有利.

[2]

(1) 終端速度の大きさを v_0 とすると $m\gamma v_0^2 = mg$ により

$$v_0 = \sqrt{g/\gamma}. \quad (9)$$

抵抗の大きさのパラメータ γ は長さの逆数の次元をもつ.

(2) 速度の鉛直上向き成分の値を $v(t)$ とし, 運動方程式をたてる.

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + m\gamma v^2. \quad (10)$$

即ち $-\gamma(v_0^2 - v^2) = \frac{dv}{dt}$ であり, 以下のように変数分離形に書き換えられる.

$$-\gamma dt = \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{1}{2v_0} \left(\frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{v_0 + v} \right) dv \quad (11)$$

$v(t=0) = 0$ となるよう両辺を積分して

$$-\gamma t = \frac{1}{2v_0} \log \left(\frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right). \quad (12)$$

これを v について解いて

$$v(t) = -v_0 \tanh(t\sqrt{g\gamma}). \quad (13)$$

ただし双曲線関数

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}, \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad (14)$$

を用いた.(グラフを描いてその振る舞いをみよ. また加法定理等を導いてみよ. $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ などから $\tan, \sin, \cos$ の兄弟のような親しみの湧く人たちであると悟れます.) $\theta \rightarrow \infty$ のとき $\tanh \theta \rightarrow 1$ なので (13) は $v(t)$ が終端速度 $-v_0$ に漸近していく様子を表している.

落下開始の瞬間に高さ $x = 0$ であるとする

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = -\frac{1}{\gamma} \log(\cosh(t\sqrt{g\gamma})). \quad (15)$$

(3) θ が正の十分大きい数であるとき

$$\log(\cosh \theta) = \log\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right) \simeq \log(e^\theta/2) = \theta - \log 2 \quad (16)$$

である. これを (15) で $t \rightarrow \infty$ の状況に適用すれば

$$x(t) \rightarrow -\frac{1}{\gamma}(t\sqrt{g\gamma} - \log 2) = -v_0 t + \frac{\log 2}{\gamma} \quad (\text{as } t \rightarrow +\infty) \quad (17)$$

一方落下開始直後から終端速度 v_0 で運動する物体の高さ y は $y(t) = -v_0 t$ である. 終端速度より小さい速さから徐々に加速するために, 最終的には同じ速さ v_0 になっても距離 $\frac{\log 2}{\gamma}$ だけ遅れをとる.

参考までに $|\theta| \ll 1$ での近似式 $e^\theta = 1 + \theta + O(\theta^2)$ を使うと (13) から $v \rightarrow -gt$ ($t \rightarrow 0$) が導かれる. これは抵抗のない自由落下と同じであるが, その理由を考えよう.