練習問題 4

[1] 我々の太陽は銀河系の中心からおよそ 25000 光年の距離を 1.7 億年周期で等速円運動している．地球は太陽から光でおよそ 8 分の距離を 1 年周期で等速円運動している．これだけのデータから銀河系の質量が太陽の質量の何倍あるか，概算せよ．ただし銀河系の質量は中心に集中しているとしてよい．

[2] 東京から地球の裏側まで中心を通るまっすぐな穴を掘ったとする．その穴に質量 m のボールを初速度 0 で落とす．地球を一様な密度 ρ の球体と仮定し，以下の問いに答えよ．

(i) 地球の中心からボールまでの距離を r としたとき，ボールに加わる力を求めよ.（空気抵抗、摩擦抵抗やボールの大きさなどは考えないとする.）

(ii) ボールに対する運動方程式を書き，どのような運動をするか調べよ.

(iii) ボールは何時間で元の位置に戻ってくるか.

(iv) 東京からロンドンまで直線的に穴を掘り，同様にボールを落とした場合，何時間でボールはロンドンに到達するか.

解答例

[1] 地球の太陽のまわりの公転運動について

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_s}{r^2}.$$

ここで，r は太陽–地球間距離，v は地球の公転速度，m_s, m はそれぞれ太陽と地球の質量である．銀河中心の周りの太陽の運動については

$$\frac{m_s V^2}{R} = \frac{GMm_s}{R^2}.$$

ただし，R は銀河中心からの太陽の距離，V は太陽の速さ，M は銀河の質量．したがって

$$M = \frac{RV^2}{G} = \frac{R}{r}\left(\frac{V}{v}\right)^2 m_s.$$

$T,\ t$ を太陽と地球の公転周期とすると $V = 2\pi R/T, v = 2\pi r/t$ となる．これを代入して

$$M = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2 m_s.$$

与えられたデータを代入して計算すると

$$M = 1.53 \times 10^{11} m_s.$$

[2]

(i) 球対称な質量分布なので半径 r の球内の質量がすべて原点に集中した場合の万有引力となる．従って

$$F(r) = G\frac{4\pi r^3 \rho}{3}\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho m r.$$

(ii) 運動方程式は (i) の結果から

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m r$$

したがってボールの運動は単振動となる．

(iii) ボールの周期は

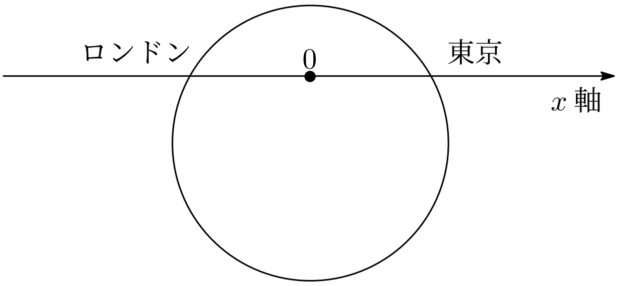
$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 3.14}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.52 \times 10^3}} = 5.058 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

つまり約 1 時間 24 分で戻ってくる．

(iv) 下の図のように東京とロンドンを結ぶ直線を x 軸とし，原点を東京とロンドンの中心にとる．この原点からボールまでの距離を x とすると，ボールに加わる力の x 成分は $-F(r)x/r$ となる．したがって運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m x$$

この運動方程式は (ii) と同じ形なので周期も上の場合に等しい．したがってロンドンまで (iii) の半分の時間, 約 42 分で到達する．



(iv) によればトンネルの出口はロンドンに限らず地球上のどこでも（どんなに近くても！）周期は同じ．つまり原理的には地球上のどこにでも 42 分でいける列車が作れることになる．なお，(iii) で求めたボールの周期は，地表すれすれを万有引力で等速円運動する質点が地球を一周するのに要する時間に等しい．興味のある人は原点 O での列車の速さを求めてみよう．(This is a classic exercise.)