

練習問題 5

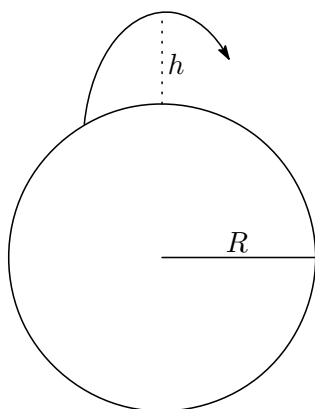
[1] xz 面内を質量 m の質点が等速直線運動して $x = vt, y = 0, z = a$ となっているとき, 原点の周りの角運動量 $\vec{L}$ を求めよ.

[2] 長さ l の糸で支点 P からつるされた質量 m の錘が水平面内で等速円運動している円錐振り子がある. 糸と鉛直下向き方向との角度は θ に保たれている. 円運動の中心を O とする.

(i) 錘の速度が $\vec{v}$ の瞬間, O の周りの角運動量 $\vec{L}$ を求めよ. $\vec{L}$ は保存するか.

(ii) 同じ瞬間における P の周りの角運動量 $\vec{L}'$ を求めよ. $\vec{L}'$ は保存するか.

[3] 地表から動径方向の速さ v_r , 地表の接線方向の速さ v_θ でロケットを打ち上げる. 空気抵抗と地球の自転は無視できるとして最高点の高度 h を決定する方程式を導け. また, 地球の半径を R として h/R が十分小さいものとしてその 2 次以上を落とす近似で h を求めよ. $v_\theta = 0$ の場合は良く知られた結果 $h = v_r^2/(2g)$ となることを確かめよ.



[1]

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mav \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$a > 0$ ならこれは y 軸正方向を向いたベクトルで一定．その大きさは原点に最接近した瞬間，つまり位置ベクトルと速度が直角になった瞬間の距離と運動量の大きさの積である．

[2]

(i) 円運動なので錘の O に関する位置ベクトル $\vec{r}$ と速度 $\vec{v}$ は常に垂直である．従って角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ の大きさは $m|\vec{r}||\vec{v}| = ml \sin \theta |\vec{v}|$ ．もちろん運動方程式から $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta}} \sin \theta$ であるのでこれを代入してもよい． $\vec{L}$ の向きは，円錐振り子の運動が上からみて反時計周りなら鉛直上向き，時計回りなら鉛直下向き． O を基準点とすると，錘にかかる力 $\vec{F}$ （重力と糸の張力の合力）は位置ベクトル $\vec{r}$ と平行なので $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ となって $\vec{L}$ は保存される．

(ii) 鉛直上向きの単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とすると， P を基準点として錘の位置ベクトルは $\vec{r} - l \cos \theta \vec{e}_z$ である．運動量は O を基準とした場合と変わらない．従って $\vec{L}' = (\vec{r} - l \cos \theta \vec{e}_z) \times m\vec{v} = \vec{L} - ml \cos \theta \vec{e}_z \times \vec{v}$ ． $\vec{e}_z$ は一定のベクトルであるが，速度 $\vec{v}$ は刻々と向きを変えるベクトルなので $\vec{L}'$ は保存しない．錘が反時計周りで $\vec{L}$ は上向きとしよう． $\vec{L}'$ は一定の大きさ $ml|\vec{v}|$ のベクトルで，水平より角度 θ だけ上を向き糸と垂直である．それは糸と O のなす平面内にある錘の回転とともに鉛直軸の周りを回転する． $\vec{L}'$ の鉛直上向き成分だけは保存する． $\frac{d\vec{L}'}{dt} = (\vec{r} - l \cos \theta \vec{e}_z) \times \vec{F}$ の右辺のベクトル（力のモーメント）は常に水平方向を向いているからである．

[3]

最高点に到達した瞬間は速度の動径成分が 0 である．このとき動径方向と垂直な成分の大きさを u_θ とする．ロケットの（地球の中心を基準とする）角運動量と力学的エネルギーはともに保存するので，発射の瞬間と最高点に達した瞬間においてこれらは一致する．これを式で書けば

$$mRv_\theta = m(R+h)u_\theta, \quad (2)$$

$$\frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2}u_\theta^2 - \frac{GMm}{R+h}. \quad (3)$$

但し地球の質量を M とした． u_θ を消去して

$$\frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 v_\theta^2 - \frac{GMm}{R+h}. \quad (4)$$

これが到達高度 h を決める式である． h/R の 1 次までの展開 $(1 + \frac{h}{R})^n = 1 + \frac{nh}{R}$ で近似すると

$$\frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{R} \simeq \frac{m}{2} \left(1 - \frac{2h}{R} \right) v_\theta^2 - \frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R} \right). \quad (5)$$

これを解いて

$$h \simeq \frac{v_r^2 R}{2 \left(\frac{GM}{R} - v_\theta^2 \right)}. \quad (6)$$

鉛直に打ち上げる場合， $v_\theta = 0$ として重力加速度の式 $g = \frac{GM}{R^2}$ を用いると (6) は $h = v_r^2 / (2g)$ という良く知られた結果に帰着する．