

練習問題 6

Mission to Mars. 地球から火星へ探査機を送る．探査機の軌道は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道で，近日点で地球の軌道と，遠日点で火星の軌道と接するものとする．地球と火星はそれぞれ半径 r_1, r_2 の円軌道上を運行するものとし， $r_2/r_1 = 1.5$ とする．

(i) 探査機の軌道をスケッチせよ．

(ii) 太陽を原点として探査機の軌道の式を $r = \frac{\lambda}{1+\varepsilon \cos \theta}$ とするとき λ と離心率 ε の値を求めよ．

(iii) 探査機の楕円軌道の長径と短径を求めよ．

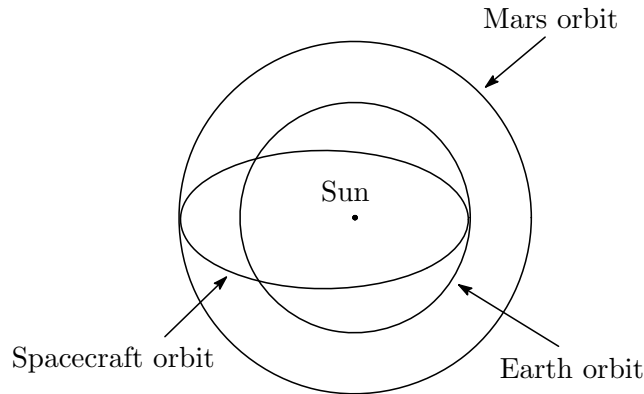
(iv) 探査機の火星軌道までの到達時間を求めよ．

(v) 探査機が地球軌道と接する瞬間において，その速さは地球の公転速度の何倍か．火星軌道と接する瞬間ではどうか．

(vi) 地球から探査機を発射する際，燃料をなるべく軽減するにはどのような方向に打ち上げるべきか．

解答例

(i)



(ii)

$$r_1 = \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \text{ (近日点)}, \quad r_2 = \frac{\lambda}{1-\varepsilon} \text{ (遠日点)} \quad (1)$$

により

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = 0.2, \quad \lambda = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 1.2r_1 = 0.8r_2. \quad (2)$$

(iii)

$$\text{長径: } \frac{\lambda}{1-\varepsilon^2} = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \text{短径: } \frac{\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (3)$$

(iv) 探査機の公転周期を T , 地球の公転周期を T_1 とする. ケプラーの第3法則から

$$\frac{T^2}{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}. \quad (4)$$

これを解いて

$$T = \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\right)^{\frac{3}{2}} T_1 = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} T_1 = (1.25)^{\frac{3}{2}} T_1 = 1.40 \text{ years}. \quad (5)$$

到達時間はこれの半分なので 0.7 年でおおよそ 255 日.

(v) 探査機が地球軌道と接するのは近日点 (perihelion), 火星軌道と接するのは遠日点 (aphelion) である. それぞれの瞬間での速さを v_p, v_a とする. 探査機の面積速度は一定であり, 以下の3通りに表される.

$$\frac{r_1 v_p}{2} = \frac{r_2 v_a}{2} = \frac{\text{楕円軌道の面積}}{T} \quad (6)$$

ここで楕円軌道の面積 $= \pi(\text{長径})(\text{短径})$ である. (6), (2), (3), (5) から

$$v_p = \frac{2\pi r_1}{T_1} \sqrt{1+\varepsilon}, \quad v_a = \frac{2\pi r_2}{T_2} \sqrt{1-\varepsilon}. \quad (7)$$

ただし火星の公転周期を T_2 とし, (4) の比の値は T_2^2/r_2^3 と等しいことを用いた. 従って探査機の速さは, 地球軌道上で $\sqrt{1+\varepsilon} = 1.10$ 倍, 火星軌道上で $\sqrt{1-\varepsilon} = 0.89$ 倍.

(vi) 地球の公転軌道の接線方向に, 公転運動と同じ方向に発射する.