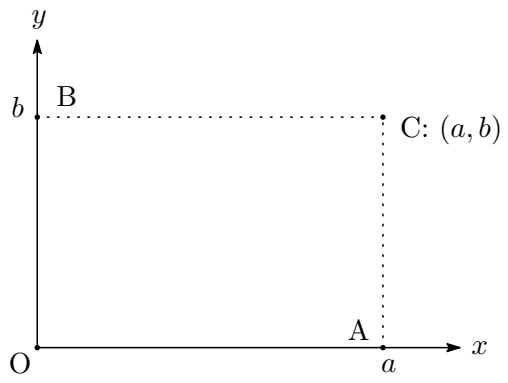
練習問題 7

[1] xy 平面内の点 (x, y) において $\vec{F} = (F_x, F_y) = (\alpha x^i y^j,\ \beta x^m y^n)$ という力が働くものとする．但し $i, j, m, n \geq 1$ とする．図のように 3 点 O, A, B, C をとる．



(i) O → A → C に沿って質点を動かすのに要する仕事 W_1 を求めよ．

(ii) O → B → C に沿って質点を動かすのに要する仕事 W_2 を求めよ．

(iii) 任意の (a, b) について $W_1 = W_2$ となるのはどんな場合か．またそのとき $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ が成り立つことを確認せよ．

(iv) (iii) の場合に $\vec{F}$ を与えるポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ．O と C を通る任意の曲線 $y = y(x)$ に沿って質点を動かすのに要する仕事 W は $W = U(a, b) - U(0, 0)$ となることを示せ．

[2] z 軸に沿って無限に長い一様な棒がある．棒の太さは無視でき，その単位長さあたりの質量（線密度）は λ とする．

(i) z 軸以外の空間の点 (x, y, z) において質量 m の質点に働く万有引力 $\vec{F}$ を求めよ．

(ii) ポテンシャル U を求めよ．

解答例

[1] (i), (ii)

$$W_1 = \int_O^A F_x dx + \int_A^C F_y dy = \int_0^b \beta a^m y^n dy = \frac{\beta a^m b^{n+1}}{n+1},$$
$$W_2 = \int_O^B F_y dy + \int_B^C F_x dx = \int_0^a \alpha b^j x^i dx = \frac{\alpha a^{i+1} b^j}{i+1}.$$

(iii) $i+1=m,\ j=n+1, \frac{\alpha}{i+1} = \frac{\beta}{n+1}$ となるとき．従ってたとえば i, j, α を消去すれば

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \frac{m}{n+1} x^{m-1} y^{n+1} \\ x^m y^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる場合．このとき $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \beta m x^{m-1} y^n$.
(iv) 曲線 $y = y(x)$ に沿って質点を原点から C まで動かすのに要する仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= \int_O^C (F_x dx + F_y dy) = \int_0^a (F_x + F_y \frac{dy}{dx}) dx \\ &= \int_0^a \left(\beta \frac{m}{n+1} x^{m-1} y^{n+1} + \beta x^m y^n \frac{dy}{dx} \right) dx \\ &= \int_0^a \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta}{n+1} x^m y^{n+1} \right) dx. \end{aligned}$$

ゆえにポテンシャルとして $U(x,y) = \frac{\beta}{n+1} x^m y^{n+1}$ (+ 定数) とおけば $W = U(a,b) - U(0,0)$ であり，この結果は O から C へいたる曲線のとり方に依存しない．

[2](i) まず z 軸から距離 r だけ離れた点 $(r,0,0)$ に働く万有引力を考える．この系は軸対称なので，万有引力の z 成分は相殺して 0 となる．相殺しない成分は x 軸の負の方向を向いている．棒の $z \sim z+dz$ の微小範囲がおよぼす万有引力の大きさは $\frac{Gm\lambda dz}{z^2+r^2}$ であり，その x 成分，すなわち $\frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}$ 倍したものが合力の大きさ F に寄与する．従って

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Gm\lambda dz}{z^2+r^2} \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{2Gm\lambda}{r}.$$

軸対称性から，一般の点 (x,y,z) における万有引力の大きさは上の F で $r = \sqrt{x^2+y^2}$ としたもので与えられる．また向きは常に z 軸へ向かうベクトルなので

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\frac{2Gm\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2Gm\lambda x}{x^2+y^2} \\ -\frac{2Gm\lambda y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(ii) $\vec{F} = -\nabla U$ となる U を見つけるのは難しくない．

$$U(x,y,z) = Gm\lambda \log(x^2+y^2) + \text{定数}. \tag{3}$$

log の中に次元のある量を書くのが気持ち悪い人は長さの 2 乗の次元を持つ定数 A を用いて $U = Gm\lambda \log((x^2+y^2)/A)$ と書いておけばよい．ちなみに，棒の $z \sim z+dz$ の微小範囲は点 $(r,0,0)$ に万有引力ポテンシャル $-\frac{Gm\lambda dz}{\sqrt{z^2+r^2}}$ を及ぼすが，これを素朴に z で積分すると発散してしまう．この方針で (3) を導くには無限大を処理する必要がある．たとえば棒が有限の長さ L を持つとして積分し，$-Gm\lambda \log L^2$ を差し引いた後に $L \to \infty$ とすればよい．