

練習問題 8

月の自転周期と地球を周回する公転周期は同じであり、このため月はいつも地球に対し同じ面を向けている。これは潮汐力による摩擦の効果であり、それは現在も地球の自転を減速させており、月は地球から遠ざかりつつある。最終的には地球の自転周期、月の自転周期、月の公転周期が全て同期して、二つの天体は、常に同じ面を向け合う状態にロックされたまま回転する運動、終端角速度での運動、へ漸近していく。太古の地球の一日は現在よりも短く、月は地球に近くて大きく見えたであろう。月と地球以外の天体の効果を無視して、最終的に月は何処まで遠ざかり、地球の一日はどれほど長くなるかを計算しよう。ポイントは、潮汐摩擦によりエネルギーの散逸があっても二つの天体の全角運動量は保存することである。

地球 ($i = 1$) と月 ($i = 2$) の質量 m_i 、慣性モーメント I_i 、現在の自転周期 T_i のデータは以下の通りである。

$$\begin{aligned} m_1 &= 6.00 \times 10^{24} \text{kg}, \quad I_1 = 9.76 \times 10^{37} \text{kg m}^2, \quad T_1 = 24 \times 3600 \text{s} \\ m_2 &= 7.35 \times 10^{22} \text{kg}, \quad I_2 = 8.90 \times 10^{34} \text{kg m}^2, \quad T_2 = 27.3 T_1. \end{aligned}$$

また、現在の地球と月の距離は $d_0 = 3.85 \times 10^8 \text{ m}$ である。

月の現在の公転周期はその自転周期 T_2 と等しい。また、自転による角運動量は、自転軸に沿って右ねじの進む向きを持ったベクトルで、その大きさは慣性モーメントと自转角速度の積に等しい。

(i) 基準点を O とするとき、一般に物体の全角運動量は、重心運動の O についての角運動量と重心の周りの自身の回転による角運動量の和になることを示せ。

(ii) 月と地球の距離を d とし、その重心の周りに角速度 ω で等速円運動する際、二つの天体の公転による角運動量の和を換算質量 μ 、距離 d 、公转角速度 ω により表わせ。

(iii) 現在の地球と月の重心の周りの全角運動量の大きさ L_0 を求めよ。

(iv) 運動方程式により、公转角速度 ω と距離 d の間に成立する関係式をたてよ。

(v) 月と地球の自転周期、公転周期が全て一致した場合の終端角速度が満たす方程式を求めよ。

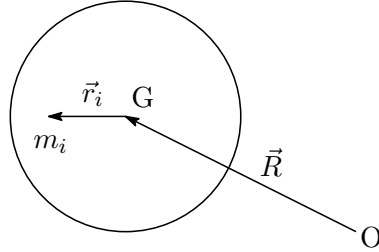
(vi) 最終状態の全角運動量は公転によるものだけと近似して (v) の方程式を解き、周期と両天体の距離を求めよ。

(vii) (vi) のような近似をせずに (v) の方程式を解いて最終状態の周期と距離を求め、(vi) の結果と比較してみよ。

(viii) 現在月は一年に 3.8cm のペースで地球から遠ざかっている。このことから地球の自転はどれくらいのペースで遅くなりつつあるか概算せよ。

解答例

(i)



上図のように物体の重心を G とし, G から物体の質量 m_i の微小部分 i へ向かうベクトルを $\vec{r}_i$ とする. O から G へ向かうベクトルを $\vec{R}$ とすると O から微小部分 i へ向かうベクトルは $\vec{R} + \vec{r}_i$ である. G は重心なので $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ であることに注意すると O の周りの全角運動量は

$$\begin{aligned} \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i) &= \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i) + \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \dot{\vec{R}} \\ &= \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i). \end{aligned} \quad (1)$$

第一項が重心運動による角運動量, 第二項が重心の周りの自転による角運動量である.

(ii) 重心から地球までの距離を d_1 , 月までの距離を d_2 とする. このとき二つの天体の公転による角運動量は

$$m_1 d_1^2 \omega + m_2 d_2^2 \omega = \mu d^2 \omega. \quad (2)$$

但しここで, 2 天体の距離 $d = d_1 + d_2$, 換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ と重心である条件 $m_1 d_1 = m_2 d_2$ を用いた.

(iii) 地球の自転角速度を $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, 月の自転角速度 (= 公転角速度) を $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ とする. (i), (ii) の結果により,

$$L_0 = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + \mu d_0^2 \omega_2 = 3.57 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (3)$$

参考までに三つの寄与の割合は

$$\frac{I_1 \omega_1}{L_0} = 0.198..., \quad \frac{I_2 \omega_2}{L_0} = 6.6 \times 10^{-6}, \quad \frac{\mu d_0^2 \omega_2}{L_0} = 0.801... \quad (4)$$

となっており, 地球の自転が 2 割程度, 残りは殆ど公転の寄与であり, 月の自転の寄与は殆ど無視できる.

(iv) 二つの天体の重心 O を原点とし, 地球の重心の位置ベクトルを $\vec{R}_1$, 月の重心の位置ベクトルを $\vec{R}_2$ とすると運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{d^3} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1), \quad m_2 \frac{d^2 \vec{R}_2}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{d^3} (\vec{R}_1 - \vec{R}_2). \quad (5)$$

ここで両天体の距離を $d = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ と書いた. 角速度 ω の等速円運動では $\frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = -\omega^2 \vec{R}_i$ ($i = 1, 2$) が成り立つので上の 2 式と併せて以下の関係式を得る.

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}. \quad (6)$$

(v) 終端角速度を ω 、月と地球の距離を d とすると (6) が成立している．公転による角運動量は (2) と (6) から

$$\mu d^2 \omega = \mu (G(m_1 + m_2))^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} = \mu \sqrt{G(m_1 + m_2)} d \quad (7)$$

と表わされる．これは天体間の距離 d の増加関数であるが、公転角速度 ω については減少関数であることに注意しよう．全角運動量の大きさ L はこれに自転の角運動量を加えたものであり、

$$L = I_1 \omega + I_2 \omega + \mu d^2 \omega = (I_1 + I_2) \omega + \mu (G(m_1 + m_2))^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} \quad (8)$$

となる．最後に角運動量保存 $L = L_0$ から終端角速度 ω に対する方程式

$$(I_1 + I_2) \omega + \mu (G(m_1 + m_2))^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} = L_0 \quad (9)$$

が得られる．

(vi) 方程式 (9) において自転による寄与を表わす項 $(I_1 + I_2) \omega$ を無視する．この近似での終端角速度を ω' とすれば

$$\omega' = \frac{\mu^3 G^2 (m_1 + m_2)^2}{L_0^3} = 1.38 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}. \quad (10)$$

この値を用いると 1 日の長さは $\frac{2\pi}{\omega'} = 52.8$ 日、距離は 5.98×10^8 m．これは現在の距離の約 1.5 倍である．

(vii) 再び方程式 (9) に立ち返る．これを解くと¹ 実数解は二つ (!) 出てくる．

$$\omega = 1.40 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \quad 3.05 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}. \quad (11)$$

現在の公転角速度は $\frac{2\pi}{T_2} = 2.66 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ であり、求める終端角速度はこれより小さいはずであるから $\omega = 1.40 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ である．近似解 (10) はこの値と誤差 1% 程度で一致している．最終的な地球の一日の長さともまでの距離 d は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 4.51 \times 10^6 \text{ s} = 52.2 \text{ 日}, \quad d = 5.94 \times 10^8 \text{ m} = 1.54 d_0. \quad (12)$$

このとき角運動量の配分は、

$$\frac{I_1 \omega}{L_0} = 3.8 \times 10^{-3}, \quad \frac{I_2 \omega}{L_0} = 3.5 \times 10^{-6}, \quad \frac{\mu d^2 \omega}{L_0} = 0.996 \quad (13)$$

となる．(4) と比較してみると、全体の 2 割程度あった地球自転の角運動量が殆ど公転の角運動量に転化されることがわかる．また自転の角運動量の寄与は小さいので、結果的に前問 (vi) の近似の精度が良いものであったこともわかる．

自転の角運動量まで取り入れたことによる (vi) との最も大きな違いは (11) における第二の解の出現である．これは物理的に何をあらわしているだろうか．地球と月の場合は、たまたま地球自転の方が月の公転より速いために潮汐摩擦は地球の自転を減速させる効果を生む．しかし自身の自転角速度よりも速い公転角速度の衛星を持つ天体では話は逆になる．つまり自転は、すばやい衛星の公転に引きずられて加速し、衛星は公転角速度を増しながら近づいてくる．お隣さんの火星はこのように接近

¹ $\omega^{\frac{1}{3}}$ についての 4 次方程式なので代数的にも解けるが、ここでは計算機を使って数値的に解けば十分．たとえば Mathematica という数式処理ソフトなら “Solve” というコマンドで一発．例えば素朴にニュートン法など試してみるのもいいでしょう．

しつづける衛星 (Phobos) を持つ惑星である。(11) の第二の解はこのようなシナリオにおける終端角速度である。仮に現在地球の自転よりも月の公転の方が速く、全角運動量が同じ L_0 という値であれば、この解を採用する必要がある。そうすると最終状態において一日の長さは5時間50分、月までの距離は 1.6×10^7 m でこれは地球の半径のわずか2.6倍のところである。角運動量の配分については、月の自転の寄与が微小なのは先の場合と同じだが、その他はかなり違って地球の自転が83%もあり、公転の分は16%にすぎない。ただし実際には月が接近してきたとしても、ある距離(ロッシュ限界)のところで地球からの潮汐力により破壊されてしまうだろう。

(viii) (4) により、月の自転による角運動量は無視してよい。すると地球の自転の角運動量 $I_1\omega_1$ と公転の角運動量 $\mu\sqrt{G(m_1+m_2)d}$ (cf. (7)) の和は一定である。従って

$$0 = \frac{d}{dt} \left(I_1\omega_1 + \mu\sqrt{G(m_1+m_2)d} \right) = I_1\omega_1 \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} + \mu\sqrt{G(m_1+m_2)d} \frac{\dot{d}}{2d} \quad (14)$$

となる。ただしドットは時間微分を表す。ここで t を現在時刻にとると、自転と公転の角運動量 $I_1\omega_1$ と $\mu\sqrt{G(m_1+m_2)d} = \mu d_0^2 \omega_2$ の比は (4) から $0.198 : 0.801 \simeq 1 : 4$ である。よって

$$0 = \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} + 2 \frac{\dot{d}}{d_0} = -\frac{\dot{T}_1}{T_1} + 2 \frac{\dot{d}}{d_0}. \quad (15)$$

ここで $T_1 = T_1(t)$ は時間に依存する地球の自転周期であり、 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ の関係を用いた。数値を代入しよう。偶然にも $\dot{d} = 3.8 \times 10^{-2}$ m/year は $d_0 = 3.8 \times 10^8$ m でぴったり割り切れて (!)

$$\dot{T}_1 = T_1 \times (2 \times 10^{-10} / \text{year}) = 1.7 \times 10^{-5} \text{ s/year}. \quad (16)$$

つまり10万年に1.7秒程度のペースで一日の長さが延びつつある。これは人間の時間スケールをはるかに超えている。でも仮にずっとこのペースで延び続けてきたとすると、たとえば9億年前には一日が今より約4時間ほど短かく、一年の日数は $365 \times \frac{24}{20} \simeq 440$ くらいあったことになる。実際には地球の変形、太陽や他の天体の影響もあるのでここでの計算結果は概算に過ぎないが、その頃(先カンブリア期、原生代の終わり近く)の地質学的痕跡からは当時の一年は480日程度あったことが示唆されている。