

練習問題 9

緯度 $\frac{\pi}{2} - \theta$ の地表近くでの落体の運動を考える．ここでは遠心力は重力加速度に繰り込まれているとし，コリオリ力の影響を調べよう．地球自転の角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とすると

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ s}^{-1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

である．¹

- (i) 地表付近の O 点を原点にとり，質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r}$ として運動方程式をたてよ．
- (ii) O 点から東向きに x 軸，北向きに y 軸，重力の方向と逆向きに z 軸を取り，運動方程式を xyz 成分で表示せよ．
- (iii) $\vec{\omega} = 0$ とした場合の一般解 $\vec{r}_0(t)$ を求めよ．
- (iv) ω が十分小さいとしてその 2 乗以上は無視する近似で運動方程式を解け．つまり， $\vec{r} = \vec{r}_0(t) + (\omega \text{ に比例する補正項})$ の形の解を求めよ．
- (v) 地表から真上に向かって初速 v_0 で物体を打ち上げると着地点はどうずれるか．
- (vi) (v) 原点の真上で，(v) の最高点の高さの位置から初速 0 で物体を落下させるとどこに着地するか．(v) とはずれ方が逆になる．なぜか．
- (vii) $\theta = 40^\circ$ (緯度 50°) の地点で初速 $v_0 = 500 \text{ m/s}$ ，仰角 $\phi = 20^\circ$ で真東に砲弾を発射する場合，コリオリ力の影響による着地点のずれはどれほどか．

¹24 時間というのは地球が太陽に同じ面を向ける瞬間の時間間隔である．遠くの星の位置に準拠した近似的な慣性系に対してはこれの $\frac{365}{366}$ 倍の時間間隔，つまり約 23 時間 56 分 4 秒ごとに地球は同じ向きをとる．従って本来なら地球自転の角速度 ω は上記の値の $\frac{366}{365}$ 倍であるが，それによる差は小さいのでここではこの値を用いる．

解答例

(i)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + 2m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}. \quad (1)$$

ここで, $\vec{g}$ は重力加速度の向きと大きさをもつベクトル.

(ii) この回転座標系では $\vec{\omega} = (0, \omega \sin \theta, \omega \cos \theta)$, $\vec{g} = (0, 0, -g)$ となる. $\vec{r} = (x, y, z)$ として (1) を成分でかけば

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta), \\ \ddot{y} &= -2\omega \dot{x} \cos \theta, \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{x} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

(iii) 自由落体なので $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ と書くと

$$x_0 = a + u_x t, \quad y_0 = b + u_y t, \quad z_0 = c + u_z t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3)$$

ここで初期条件 ($t = 0$) として位置が (a, b, c) , 速度が (u_x, u_y, u_z) であるとした.

(iv) $\vec{r} = \vec{r}_0 + (\omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma)$ とし,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \omega\alpha, & \dot{x} &= u_x + \omega\dot{\alpha}, & \ddot{x} &= \omega\ddot{\alpha}, \\ y &= y_0 + \omega\beta, & \dot{y} &= u_y + \omega\dot{\beta}, & \ddot{y} &= \omega\ddot{\beta}, \\ z &= z_0 + \omega\gamma, & \dot{z} &= u_z - gt + \omega\dot{\gamma}, & \ddot{z} &= -g + \omega\ddot{\gamma} \end{aligned}$$

を (2) に代入して ω の 2 次以上を無視する近似をすると

$$\ddot{\alpha} = 2u_y \cos \theta - 2u_z \sin \theta + 2gt \sin \theta, \quad \ddot{\beta} = -2u_x \cos \theta, \quad \ddot{\gamma} = 2u_x \sin \theta. \quad (4)$$

$\vec{r}_0$ が初期条件にあうように決めたので, 補正項 $(\omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma)$ とその時間微分はともに $t = 0$ で 0 である. この条件のもとに (4) を積分すれば α, β, γ は一意的に定まり, 補正入りの $\vec{r} = (x, y, z)$ は以下ようになる.

$$\begin{aligned} x &= a + u_x t + \omega(u_y \cos \theta - u_z \sin \theta)t^2 + \frac{1}{3} \omega g t^3 \sin \theta, \\ y &= b + u_y t - \omega(u_x \cos \theta)t^2, \\ z &= c + u_z t - \frac{1}{2} g t^2 + \omega(u_x \sin \theta)t^2. \end{aligned} \quad (5)$$

(v) 原点から打ち上げるとして (5) で $a = b = c$, $u_x = u_y = 0, u_z = v_0$ とすると

$$x = -\omega(v_0 \sin \theta)t^2 + \frac{1}{3} \omega g t^3 \sin \theta, \quad y = 0, \quad z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (6)$$

この近似の範囲では, z は自由落体の場合と同じになるので到達高度 $h = \frac{v_0^2}{2g}$ と着地時刻 $t = \frac{2v_0}{g}$ にはコリオリ力の影響はない. 着地点では

$$x = -\frac{4\omega v_0^3 \sin \theta}{3g^2} = -\frac{4\omega}{3} \sqrt{\frac{(2h)^3}{g}} \sin \theta, \quad y = z = 0. \quad (7)$$

よって北半球 ($\theta \leq \frac{\pi}{2}$) でも南半球 ($\theta \geq \frac{\pi}{2}$) でも西にずれる .

(vi) (5) で $a = b = 0, c = h, u_x = u_y = u_z = 0$ とすると

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin \theta, \quad y = 0, \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (8)$$

着地点は

$$x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2h)^3}{g}} \sin \theta, \quad y = z = 0. \quad (9)$$

よって北半球でも南半球でも東にずれる . たとえば赤道上 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) で $h = 100\text{m}$ とすると (9) は $x \simeq 2.2\text{cm}$ となる .

地球の自転によるコリオリ力は、鉛直に上昇する物体については北半球でも南半球でも西向きに働き、落下する物体には東向きに働く . (vi) では落下する状況でのみコリオリ力を受けるので東にずれる . (v) の場合は上昇する間に西にずれ、最高点に達したときには西向きに速さ $\frac{\omega v_0^2}{g} \sin \theta$ を得てしまっている . (6) を調べると、着地する瞬間にちょうど $\dot{x} = 0$ となることがわかる . つまり落下の際にうける東向きのコリオリ力は、ちょうど最高点で持っていた西向きの速さを打ち消す働きをする . 従って打ち上げから着地までの間、常に速度の水平成分は西向きであることがわかる .

(vii) (5) で $a = b = c = 0, u_x = v_0 \cos \phi, u_y = 0, u_z = v_0 \sin \phi$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \phi)t - \omega(v_0 \sin \phi \sin \theta)t^2 + \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin \theta, \\ y &= -\omega(v_0 \cos \phi \cos \theta)t^2, \\ z &= (v_0 \sin \phi)t - \frac{1}{2}gt^2 + \omega(v_0 \cos \phi \sin \theta)t^2. \end{aligned} \quad (10)$$

ω が小さいのでこれについて 1 次までの近似でずれを計算しよう . (10) において自由落下からのずれは因子 ω を含む項である . 従って砲弾の飛行時間 t は ω の 0 次まで求めれば十分である . $z = 0$ をといて

$$t = \frac{v_0 \sin \phi}{\frac{g}{2} - \omega(v_0 \cos \phi \sin \theta)} = \frac{2v_0 \sin \phi}{g} + O(\omega).$$

これを (10) の x, y の ω を含む項 ($\delta x, \delta y$ と書こう) に代入して

$$\delta x = -\frac{4\omega v_0^3 \sin^3 \phi \sin \theta}{3g^2}, \quad \delta y = -\frac{4\omega v_0^3 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta}{g^2}. \quad (11)$$

数値を代入すると以下の結果を得る .

$$\text{飛行時間 } t = \frac{2v_0 \sin \phi}{g} = 35 \text{ 秒}$$

$$\text{コリオリ力がないとした場合の着地点までの水平距離 } x = (v_0 \cos \phi)t = 16.4\text{km}$$

$$\delta x = -3.2\text{m}, \quad \delta y = -32\text{m}.$$

δx は北半球でも南半球でも負、つまり自由落体よりも砲弾は手前に落ちる . ただしそのずれ δx は x に比べてとても小さい . これに対し南北方向 (射撃手にとっての左右) のずれ δy は有意な大きさであり、その向きは北半球と南半球では逆転する . 因子 $\cos \theta$ に注意 . 北半球では砲弾は進行方向の右側に、南半球では進行方向の左側にカーブする . 第一次世界大戦中の 1914 年 12 月 8 日、南大西洋 Falkland 沖の海戦 (南緯約 50°) でイギリス海軍はドイツ東洋艦隊を砲撃するも、何十メートルも左側にはずしていた . 北半球と南半球でコリオリ力の効果が逆になることを忘れていたためだと言われている .

参考までに、方程式 (2) について、 ω の 1 次近似の解だけでなく完全な解を書き下せる。初期条件 $\vec{r}(0) = (a, b, c)$, $\dot{\vec{r}}(0) = (u_x, u_y, u_z)$ を満たす解 $\vec{r} = (x, y, z)$ は

$$\begin{aligned}x &= a + \frac{gt \sin \theta}{2\omega} + \frac{u_1}{2\omega} \sin(2\omega t) + \frac{u_2}{2\omega} (1 - \cos(2\omega t)), \\y &= b - \frac{u_1 \cos \theta}{2\omega} (1 - \cos(2\omega t)) + \frac{u_2 \cos \theta}{2\omega} \sin(2\omega t) + \sin \theta \left(u_3 - \frac{1}{2}gt \cos \theta \right) t, \\z &= c + \frac{u_1 \sin \theta}{2\omega} (1 - \cos(2\omega t)) - \frac{u_2 \sin \theta}{2\omega} \sin(2\omega t) + \cos \theta \left(u_3 - \frac{1}{2}gt \cos \theta \right) t.\end{aligned}$$

ただし

$$u_1 = u_x - \frac{g \sin \theta}{2\omega}, \quad u_2 = u_y \cos \theta - u_z \sin \theta, \quad u_3 = u_y \sin \theta + u_z \cos \theta$$

とおいた。ここで $\omega \rightarrow 0$ として ω の 1 次まで展開したものは (5) と一致する。