

以下の記述はおもに直接計算によるものであり，技術的な比重が大きいのので，その仔細のすべてに習熟する必要はない．回転の行列とその基本性質，角速度ベクトルに馴染んでもらえればよい．

1 回転の行列

行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の転置 (transpose) といい， tA とかく．あらわに書けば

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

記号 t は transpose の t で，時間とは関係ない．成分でかくな

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, \quad {}^tA = ({}^tA_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \quad \text{としたとき} \quad {}^tA_{ij} = A_{ji} \quad (2)$$

という関係がある． ${}^tA = A$ となる場合に対称行列， ${}^tA = -A$ となる場合は反対称行列という．定義から以下の関係式は容易に確認できる．

$${}^t({}^tA) = A, \quad (3)$$

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA, \quad (4)$$

$$(A\vec{r}, \vec{s}) = (\vec{r}, {}^tA\vec{s}) \quad (\text{任意のベクトル } \vec{r}, \vec{s} \text{ について}). \quad (5)$$

以下では練習問題 1[1] の解答例に紹介した規約を用いて，同じ添え字が 2 回現れたら 1 から 3 まで和をとっていると了解する．例えば (ε_{ijk}) の定義は練習問題 1[1] 参照．)

$$\text{ベクトルの内積は} \quad (\vec{r}, \vec{s}) = r_i s_i, \quad (6)$$

$$\text{行列の積の成分は} \quad (AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}, \quad (7)$$

$$\text{行列とベクトルの積の成分は} \quad (A\vec{r})_i = A_{ij} r_j, \quad (8)$$

$$\text{ベクトルの外積の成分は} \quad (\vec{r} \times \vec{s})_i = \varepsilon_{ijk} r_j s_k, \quad (9)$$

$$\text{行列 } A \text{ の行列式は} \quad \det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{jkm} A_{j1} A_{k2} A_{m3} \quad (10)$$

といった具合である．これを用いて (4), (5) の証明を書くとな下のようなになる．

$$(4): \text{左辺の } ij \text{ 成分} \stackrel{(2)}{=} (AB)_{ji} = A_{jk} B_{ki} = B_{ki} A_{jk} \stackrel{(2)}{=} {}^tB_{ik} {}^tA_{kj} = ({}^tB {}^tA)_{ij} = \text{右辺の } ij \text{ 成分}.$$

$$(5): \text{左辺} = (A\vec{r})_i s_i = A_{ij} r_j s_i \stackrel{(2)}{=} r_j {}^tA_{ji} s_i = r_j ({}^tA\vec{s})_j = \text{右辺}.$$

与えられた行列 R が回転であるための条件を考えよう．回転であればベクトルの長さや相対角度を変えない．従って内積を不変に保つから $(R\vec{r}, R\vec{s}) = (\vec{r}, \vec{s})$ が成り立つ．(5) からこれは $(\vec{r}, {}^tRR\vec{s}) = (\vec{r}, \vec{s})$ が任意の $\vec{r}, \vec{s}$ について成り立つことを意味する．従って ${}^tRR = 1$ であることが必要である．実はこれでは十分条件にもなっていて， R が回転であるための必要十分条件は

$${}^tRR = 1 \quad \text{かつ} \quad \det R = 1 \quad (11)$$

である¹．第一の条件はもちろん $R^{-1} = {}^tR$ と同値である．

¹ ${}^tRR = 1$ の両辺の行列式を取ると $(\det R)^2 = 1$ となるので，既に (11) の第一の条件だけから $\det R = \pm 1$ に絞られている．このうち，回転は単位行列と連続的につながるもの（連結成分）なので $\det R = 1$ である． $\det R = -1$ の連結成分は回転と鏡映の合成を表す．

命題 R が回転の行列であれば以下の性質を持つ .

(i) R の各列は正規直交系をなす . すなわち ,

$$R = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \\ R_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{pmatrix} \quad (12)$$

と書いたとき $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

(ii) R の各行は正規直交系をなす .

(iii) 任意のベクトル $\vec{r}, \vec{s}$ について

$$R(\vec{r} \times \vec{s}) = (R\vec{r}) \times (R\vec{s}) \quad (13)$$

(iv) 特に R が時間に依存する場合は

$${}^t(R^{-1}\dot{R}) = -R^{-1}\dot{R} \quad (14)$$

証明

(i) ${}^tRR = 1$ を成分で書くと $({}^tRR)_{ij} = \delta_{ij}$. すなわち , $\delta_{ij} = {}^tR_{ik}R_{kj} \stackrel{(2)}{=} R_{ki}R_{kj} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

(ii) ${}^tR = R^{-1}$ なので $R{}^tR = 1$ も成り立つ . これを (i) と同様に成分で書き下せばよい .

(iii) 両辺に左から ${}^tR = R^{-1}$ をかけた以下の式を示す .

$$\vec{r} \times \vec{s} = {}^tR((R\vec{r}) \times (R\vec{s})) \quad (15)$$

(15) の右辺の第 i 成分 $= {}^tR_{ij}((R\vec{r}) \times (R\vec{s}))_j$

$$\stackrel{(2),(9)}{=} R_{ji}\varepsilon_{jkm}(R\vec{r})_k(R\vec{s})_m$$

$$= R_{ji}\varepsilon_{jkm}R_{kp}r_pR_{mq}s_q$$

$$= (\varepsilon_{jkm}R_{ji}R_{kp}R_{mq})r_ps_q$$

$$\stackrel{(10)}{=} \begin{vmatrix} R_{1i} & R_{1p} & R_{1q} \\ R_{2i} & R_{2p} & R_{2q} \\ R_{3i} & R_{3p} & R_{3q} \end{vmatrix} r_ps_q$$

$$= \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \varepsilon_{ipq}r_ps_q \quad (\text{行列式の性質による})$$

$$\stackrel{(10)}{=} (\det R)\varepsilon_{ipq}r_ps_q$$

$$\stackrel{(11)}{=} \varepsilon_{ipq}r_ps_q \stackrel{(9)}{=} (15) \text{ の左辺の第 } i \text{ 成分}.$$

(iv) ${}^tRR = 1$ が t によらずになりたつのでこれを t で微分すると

$${}^t\dot{R}R + {}^tR\dot{R} = 0 \quad (16)$$

従って (14) は以下のように示される .

$${}^t(R^{-1}\dot{R}) = {}^t({}^tR\dot{R}) \stackrel{(4)}{=} {}^t\dot{R} {}^t({}^tR) \stackrel{(3)}{=} {}^t\dot{R}R \stackrel{(16)}{=} -{}^tR\dot{R} = -R^{-1}\dot{R} \quad (17)$$

注意 . (i), (ii) の性質に鑑みて , ${}^tRR = 1$ をみたす実行列を直交行列と呼ぶ . 行列式が -1 でなく $+1$ であることから $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (右手系) であることも導かれる .

2 角速度ベクトル

命題 (iv) により時間に依存する回転行列 $R = R(t)$ について $R^{-1}\dot{R}$ は反対称行列である．従って任意の時刻で

$$R^{-1}\dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

となる (一般には時間に依存する) ベクトル

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

が定まる．これを角速度ベクトルという．その意味を把握するため、任意のベクトル $\vec{s}$ について

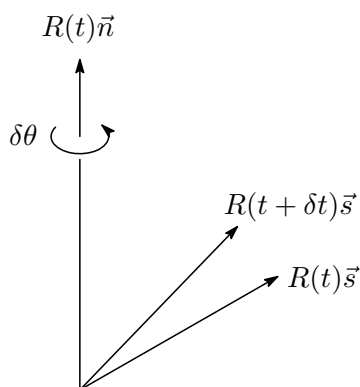
$$R^{-1}\dot{R}\vec{s} = \vec{\omega} \times \vec{s}, \quad \text{あるいは命題 (iii) により} \quad \dot{R}\vec{s} = (R\vec{\omega}) \times (R\vec{s}). \quad (20)$$

が成り立つことに注目しよう．はじめの式は，その両辺を書き下せば

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2 \\ \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3 \\ \omega_1 s_2 - \omega_2 s_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となるのですぐにわかる．

時刻 t におけるベクトル $R(t)\vec{s}$ が微小時間 δt だけ回転運動して $R(t+\delta t)\vec{s}$ になったとする．このときの変位 $R(t+\delta t)\vec{s} - R(t)\vec{s}$ は，時刻 t における瞬間の回転軸の周りに微小角度 $\delta\theta$ だけ振り回されることにより引き起こされる．また， $\frac{\delta\theta}{\delta t}$ はその瞬間の角速度の大きさである．



$\vec{n}$ を単位ベクトルとし，瞬間の回転軸の向きを $R(t)\vec{n}$ とすると図のようになる． $\delta t, \delta\theta$ が微小であれば，変位 $R(t+\delta t)\vec{s} - R(t)\vec{s}$ は外積 $\delta\theta (R(t)\vec{n}) \times (R(t)\vec{s})$ に等しい²．従って

$$\frac{R(t+\delta t)\vec{s} - R(t)\vec{s}}{\delta t} = \left(R(t) \frac{\delta\theta}{\delta t} \vec{n} \right) \times (R(t)\vec{s}) \quad \delta t \rightarrow 0. \quad (22)$$

これと (20) の第二式を比べてみると $\vec{\omega} = \frac{\delta\theta}{\delta t} \vec{n}$ であることがわかる．すなわち，角速度ベクトルの大きさは瞬間の角速度に等しく， $R(t)\vec{\omega}$ は瞬間の回転軸の向きに一致する．上の図は慣性系から眺めた絵であるとし， $R(t)$ が剛体の回転を表すとしよう．次節でみるように，剛体に固定された座標系 (剛体系) に移る座標変換は，全てのベクトルから一斉に $R(t)$ をはがす (左から $R(t)^{-1}$ をかける) 操作となる．従って剛体系では $\vec{\omega}$ 自体が瞬間の回転軸の向きを与えている．

² $|R(t)\vec{n}| = 1$ に注意して，向きと大きさそれぞれについて確かめてみよ．

3 回転座標系への移行

慣性系と剛体系それぞれの基底ベクトルを以下のようにとる．

$$\begin{aligned} \text{慣性系: } \vec{e}_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{剛体系: } \vec{e}_1 &= R(t)\vec{e}_x, \quad \vec{e}_2 = R(t)\vec{e}_y, \quad \vec{e}_3 = R(t)\vec{e}_z \end{aligned}$$

後者の記号は (12) と整合するようにとってある．命題 (i) により $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ は確かに正規直交基底をなす．与えられたベクトルの慣性系における座標 x, y, z と剛体系での座標 x_1, x_2, x_3 の関係は

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad (23)$$

により定まる．これを行列を用いて書くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \vec{r} = R\vec{\xi} \quad (24)$$

ここで， $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ は慣性系の座標により表示されたベクトルであり，剛体系の座標からなるベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を $\vec{\xi}$ と書いた．(24) が二つの系の座標変換を定める式である． $\vec{r}, R, \vec{\xi}$ がこれを満たしながら時間とともに変化する状況を想定して時間で微分すると

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \dot{R}\vec{\xi} = R \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt} + R^{-1}\dot{R}\vec{\xi} \right) \stackrel{(20)}{=} R \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\xi} \right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= R \left(\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\xi} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) + \dot{R} \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\xi} \right) \\ &\stackrel{(20)}{=} R \left(\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\xi} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

このように慣性系での時間微分（左辺）は剛体系でみると，つまり右辺で R をはがしたものをみると，回転の効果が角速度ベクトルを介して入ってくる．

オイラー方程式は (25) において $\vec{r}$ を剛体の角運動量とした式から導かれる．一方 (26) で $\vec{r}$ を質量 m の質点の位置ベクトルとし，慣性系での運動方程式 $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ に (24) と $\vec{F} = R\vec{F}'$ を代入して整理すると

$$m \frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} = \vec{F}' + 2m \frac{d\vec{\xi}}{dt} \times \vec{\omega} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\xi} \quad (27)$$

右辺の第一項 $\vec{F}'$ は，慣性系でも働いていた力が回転により向きが変わって見えていることを表わす．右辺の第二項以降は回転による慣性力の一般式である．第二項はコリオリ力，第三項は遠心力をあらわす．遠心力は以下のように書いておくとわかり易い．

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) = m|\vec{\omega}|^2 \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = \vec{\xi} - \frac{(\vec{\omega}, \vec{\xi})\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (28)$$

この式変形については練習問題 1 を参照のこと． $\vec{\eta}$ は剛体系において，回転軸 $\vec{\omega}$ からそれと垂直に質点の位置 $\vec{\xi}$ に向かうベクトルである．(27) の右辺の最後の項は角速度の変化による慣性力であるが特別な名前はない．