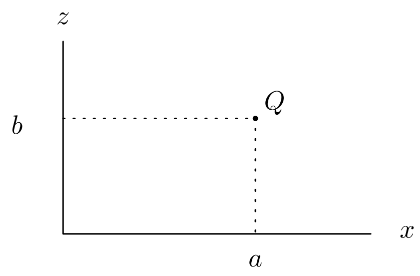
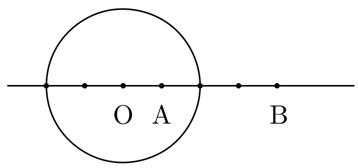
導体と電気鏡映法

1. xy 平面と yz 平面 が y 軸において接合された形の導体を考える。 $(x, y, z) = (a, 0, b)$ の点に点電荷 Q を置く。 $(a, b > 0$ とする。）鏡映法を用いて電場をもとめよ。点電荷の受ける力を求めよ。



2. 半径 a の薄い球殻状の導体が接地されている．中心から距離 r のところに点電荷 q がある．導体上の誘導電荷が点電荷 q に及ぼす力を求めたい.

(i) 定点 A, B からの距離が $m : n$ $(m < n)$ の点の軌跡は，A と B を $m^2 : n^2$ に外分する点 O を中心とする半径 $R = \frac{mn}{n^2 - m^2}|\mathrm{AB}|$ の円であることを示せ.（アポロニウスの円）



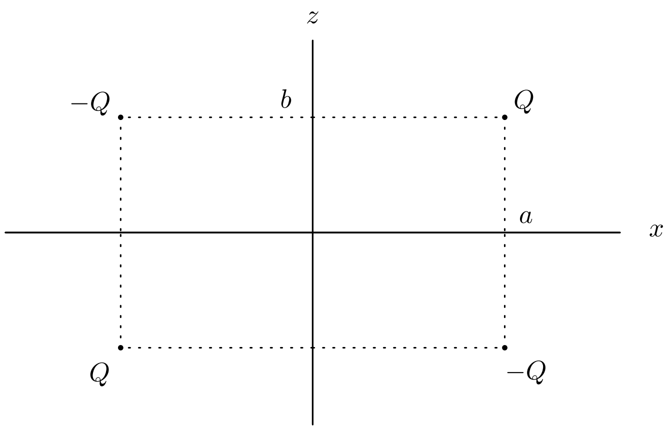
$m : n = 1 : 2$ の例

(ii) 適当な鏡映点電荷を導入して点電荷 q に働く力を求めよ.

解答例

1. $(x, y, z) = (a, 0, b)$ の点にある真の点電荷 Q 以外に以下の三つの鏡像電荷を考える。

$$Q \text{ at } (-a, 0, -b), \quad -Q \text{ at } (-a, 0, b) \text{ and } (a, 0, -b).$$



これらの４つの点電荷の作り出すクーロン電場は $x, z > 0$ の領域での全ての要請を満たす（特になぜ境界条件が満たされるかに注意）。よって一意性からこれが $x, z > 0$ の領域での求める電場である。（作図してみよ。）

点電荷の受ける力は３つの鏡映電荷からのクーロン力の重ねあわせで与えられる。

2.

(i) 算数なので略.

(ii)

● 点電荷 q が導体球殻の外部にある場合 $(r > a)$.

B 点に点電荷 q があるとする．A 点に鏡映電荷 $-Q$ を導入すると，一般の観測点 P における静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathrm{P}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathrm{PB}|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathrm{PA}|}.$$

導体は等電位であり，接地されているので無限遠と等しい電位を持つ．上の ϕ は無限遠で 0 となるので，導体球殻上でも 0 となる．従って鏡映電荷 Q とその位置は，点 P が球殻上にあるとき，$\phi(\mathrm{P})$ が常に 0 となるように決めればよい．これは，点 A,B からの距離の比が $Q : q$ となるアポロニウス球面を導体球殻と一致させることにより達成される．

題意より図で $|\mathrm{OB}| = r$ である．$|\mathrm{OA}| = d$ とすると $|\mathrm{AB}| = r - d$ なので

$$m : n = Q : q, \quad d : r = m^2 : n^2, \quad a = \frac{mn(r-d)}{n^2 - m^2}$$

を解いて

$$d = \frac{a^2}{r}, \quad Q = \frac{aq}{r}. \tag{1}$$

B 点にある点電荷 q に働く力は A 点にある鏡映電荷 $-Q$ が及ぼすクーロン力と等しくその向きは $\vec{BA}$ の方向であり，大きさは

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0|\mathrm{AB}|^2} = \frac{aq^2 r}{4\pi\epsilon_0(r^2 - a^2)^2}. \tag{2}$$

● 点電荷 q が導体球殻の内部にある場合 $(r < a)$.

$r > a$ の場合で A と B の役割を入れ換えればよい．点 A に点電荷 q があるとし，点 B に鏡映電荷 $-Q$ を導入する．題意より図で $|\mathrm{OA}| = r$ である．$|\mathrm{OB}| = d$ とすると $|\mathrm{AB}| = d - r$ なので

$$m : n = q : Q, \quad r : d = m^2 : n^2, \quad a = \frac{mn(d-r)}{n^2 - m^2}$$

を解くと (1) と同じ結果を得る．A 点にある点電荷 q に働く力は B 点にある鏡映電荷 $-Q$ が及ぼすクーロン力と等しくその向きは $\vec{AB}$ の方向であり，大きさは再び (2) で与えられる．