

セル・オートマトンと量子群

国場敦夫

東京大学総合文化研究科

Cellular Automata and Quantum Groups

Atsuo Kuniba

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

1 はじめに

時刻 t において空間格子の各点 i に離散的な局所状態変数 σ_i^t を割り当てる．時刻 t における全系の状態 $\{\sigma_j^t\}$ から時刻 $t+1$ での各局所状態 σ_i^{t+1} を一意的に定める規則が与えられているとき，セル・オートマトンという．セル・オートマトンは力学系，パターン形成，交通流，脳-中枢神経系，自己増殖系，計算機理論などをはじめ，数理科学の様々な分野において複雑な現象の本質を抽出したモデルとして研究されてきた [30]．

1990 年，高橋大輔氏と薩摩順吉氏 [26] は 1 次元格子上的セル・オートマトンの例で，ソリトン系としての性質をあまねくそなえたもの，ソリトンセル・オートマトンを提出した．その時間発展のアルゴリズムは，一列に並んだ箱に入った玉を一定の規則で移動するというエレガントな記述を持つことから箱玉系とも呼ばれる．

ソリトンとは，もともと連続な $1+1$ 次元の非線形波動において，多体衝突に際して安定な粒子のように振舞う孤立波解に対して名づけられたものである [27]．ソリトンの存在は非線形発展方程式の可積分性を示唆するもので，高階の時間発展や無限個の保存量を有し，初期値問題が逆散乱法という手法で解けるなどの著しい性質をあわせ持つ．そのような非線形方程式の一群はソリトン方程式と総称され，今日ではその数理構造はソリトン理論としてよく理解されている [1, 12, 22, 27]．

箱玉系のソリトンの性質の起源を可積分系の立場から明らかにすること，それは発見者自身により提唱された問題であった [26]．これに対しては二つの答えが提出されている．

(i) ソリトン方程式の超離散化 [29]

(ii) 可解格子モデルの結晶化 [7, 5, 6]

詳しい説明は後に譲るが，(i) は箱玉系の発展方程式を既存のソリトン方程式の離散化と同等するものである．連続系からセル・オートマトンに移行するには独立変数である時空間座標のみならず，従属変数である振幅（波高）をも離散化する必要がある．後者の手続きは超離散化と呼ばれ，様々な応用へと発展している [4, 13]．(ii) は箱玉系の時間発展を，2 次元格子上に定式化さ

れたスピン系の転送行列の作用とみなすものである．絶対零度に相当する極限でちょうど箱玉系に対応するパターンだけが基底状態として選択されるような統計力学の可解格子模型 [2] が存在する．そのような模型は量子群 [15] の対称性を持つことが知られており，絶対零度極限に相当する操作は結晶化 [17] と呼ばれる．このような観点は，量子群を用いた箱玉系の組織的拡張と解析 [8, 9, 10] を可能にしている．

ソリトン方程式は作用・角変数への正準変換により時間発展を自明化出来ることが知られており，その意味で古典可積分系である．一方可解格子模型にはハミルトニアンを含む可換なオペレーターが自由度にみあうだけ存在し，その意味で量子可積分系と呼ばれるクラスに属す．従って二つの描像 (i),(ii) の共立は，「箱玉系は古典可積分系と量子可積分系がそれぞれ超離散化と結晶化によってつづれて歩み寄った接点に存在する」ことを意味する．

以上が前世紀末までに得られていた知見であるが，超離散化と結晶化の一致は可積分系の専門家にとってもミステリーであり，新たな問題を提起した．「二つの描像 (i) と (ii) を統一せよ」．これについては今世紀になって

(iii) 幾何クリスタルとトロピカル R

と呼ばれる構造が解決の鍵として浮上してきている．

本稿では主に (ii) のアプローチに沿って，箱玉系の量子群的な一般化として提出された 1 次元可積分セル・オートマトン [7] について概説する．幸いそれらは量子群の予備知識を一切必要としない初等的なアルゴリズム [9] によって定式化できる．紙面の都合上，量子群的な背景や (iii) に関する著者らの最近の研究 [19, 20] については 4 節で軽く触れるに留める．

2 粒子・反粒子系的アルゴリズム

箱玉系を含む 7 個の系列のソリトンセル・オートマトンを初等的なアルゴリズムによって定義しよう．各系列は整数 n によって $A_n^{(1)} (n \geq 1)$, $A_{2n-1}^{(2)} (n \geq 3)$, $A_{2n}^{(2)} (n \geq 2)$, $B_n^{(1)} (n \geq 3)$, $C_n^{(1)} (n \geq 2)$, $D_n^{(1)} (n \geq 4)$, $D_{n+1}^{(2)} (n \geq 2)$ という記号でラベルされる．一つのオートマトンはこのいずれかで n の値を指定したもので，例えば $C_3^{(1)}$ オートマトンなどと呼ばれる．箱玉系 [24, 26] は $A_n^{(1)}$ の系列に対応し，そのダイナミクスは n 種の玉の移動により記述される．他の 6 系列 [9] は $n-1$ 種の粒子とその反粒子が中性な束縛状態を介して対生成・消滅しながら移動する系として記述される．

これら 7 系列を全て統一的なアルゴリズムで記述するため，まずオートマトンの局所状態の集合 B とその部分集合 $J = \{j_1, \dots, j_d\} \subset B$ を次の表のように指定する．(d は表から定まる.)

	B	(j_d, \dots, j_1)
$A_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n+1\}$	$(2, 3, \dots, n+1)$
$A_{2n-1}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2)$
$A_{2n}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1, \emptyset\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2, \emptyset)$
$B_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, 0, -n, \dots, -3, -2)$
$C_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2, -1)$
$D_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -n, \dots, -3, -2)$
$D_{n+1}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1, \emptyset\}$	$(2, 3, \dots, n, 0, -n, \dots, -3, -2, \emptyset)$

ここで \emptyset は空集合の意ではなく、単なるシンボルと了解する。ある時刻におけるオートマトンの状態とは B の元の 1 次元列で、遠方での境界条件を満たすものであり、その集合を

$$W = \{(\dots, b_i, b_{i+1}, \dots) \in \dots \times B \times B \times \dots \mid b_i = 1 \text{ for } |i| \gg 1\} \quad (1)$$

と指定する。集合 $J = \{j_1, \dots, j_d\}$ の元 j に対し、 j^* を

$$j^* = \begin{cases} j & \text{if } j \in \{0, -1, \emptyset\}, \\ -j & \text{if } j \in J \setminus \{0, -1, \emptyset\} \end{cases}$$

と定める。オートマトンの時間発展 $T : W \rightarrow W$ は

$$T = K_{j_d} \cdots K_{j_2} K_{j_1} \quad (2)$$

という様に因子化した形で与えられる。オペレーター $K_j : W \rightarrow W$ ($j \in J$) を定義するため、以下では W の元 $(\dots, b_i, b_{i+1}, \dots)$ を、 i 番目の箱に b_i が入っている局所状態の列とみなし、 b_i が b_{i+1} の左隣りとなるよう並んでいるものとする。また $b_i = 1 \in B$ の局所状態を特別視して空箱とみなす。従って $b(\neq 1) \in B$ のとき、「箱から b を取り去る」とは局所状態を $b \rightarrow 1$ と変えることを意味し、「空箱に b を入れる」とは $1 \rightarrow b$ とすることを意味するものとする。 W の元には空箱でない箱は有限個しかない。この規約のもとで K_j は以下の Step 1-4 のアルゴリズムで定義される。

Step 1. -1 があれば各箱内でそれをペア j, j^* に置き換える。

Step 2. 最も左にある j を、それより右にある空箱または j^* だけを含む箱のうち最隣接のものに移動する (j^* と j のペアを含む箱は移動先として禁止)

Step 3. 未だ移動してない j について Step 2 を行い、全ての j を一度ずつ移動させるまで繰り返す。

Step 4. 各箱内にペア j, j^* があればそれを -1 に置き換える .

注 1. $A_n^{(1)}$ オートマトンでは B と J に -1 が含まれないことから Step 1,4 は何も変化を引き起こさない . その結果 K_j は「全ての j を左のものから順に一度ずつ, 自分より右の最隣接空箱に移動」という操作に簡略化する . これは箱玉系の玉の移動操作 [24] に一致する .

注 2. K_{-1} もより単純な操作「全ての -1 を左のものから順に一度ずつ, 自分より右の最隣接空箱に移動」に帰着する .

注 3. j が $-1, 0, \emptyset$ のいずれかの場合は Step1 により二つの j を含む箱が出現する . そのような二つの j については移動したか否かの識別はするが, どちらが左右にあるかは区別しない . 例 2 参照のこと .

$A_n^{(1)}$ 以外の場合に Step 1-4 の粒子・反粒子系の解釈をしよう . 局所状態の部分集合 $B \setminus \{1, -1\}$ は変換 $j \leftrightarrow j^*$ で不変なので j^* と j は互いに反粒子とみなすことができる . -1 は「中性」な束縛状態であり, 特に 0 と \emptyset はそれぞれ自身を反粒子として束縛状態を作れる中性粒子である . この解釈のもとに, オペレーター $K_j (j \neq -1)$ とは「粒子 j が空箱か, まだ束縛状態をつくるお相手のいない反粒子 j^* を求めて右に移動してゆくプロセス」と表現できる .

文学的表現に頼るのが気に入らないむきにはプログラミングに適した局所の規則だけによる K_j の定義もある . まず J の元 j に付随して写像 $L_j : (\mathbb{Z}_{\geq 0}) \times B \rightarrow B \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を導入しよう . $L_j : (l, b) \mapsto (b', l')$ であることをダイアグラム

$$\begin{array}{c} b \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{j} l' \\ \downarrow \\ b' \end{array}$$

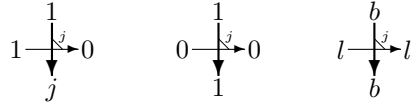
により表わす事にすると, L_j は以下により完全に定まる . ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

1. $j \notin \{1, 0, -1, \emptyset\}$ の場合 . $b \in B \setminus \{j, -j, 1, -1\}$ について

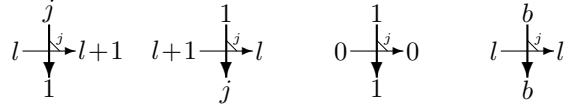
$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{j} l+1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -j \\ \downarrow \\ l+1 \xrightarrow{j} l \\ \downarrow \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} -j \\ \downarrow \\ 0 \xrightarrow{j} 0 \\ \downarrow \\ -j \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{j} l+1 \\ \downarrow \\ -j \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ l+1 \xrightarrow{j} l \\ \downarrow \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 0 \xrightarrow{j} 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} b \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{j} l \\ \downarrow \\ b \end{array} & \end{array}$$

2. $j \in \{0, \emptyset\}$ の場合 . $b \in B \setminus \{j, 1, -1\}$ について

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{j} l+2 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ 0 \xrightarrow{j} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ l+1 \xrightarrow{j} l+1 \\ \downarrow \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ l+2 \xrightarrow{j} l \\ \downarrow \\ -1 \end{array} \end{array}$$

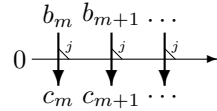


3. $j = -1$ の場合 . $b \in B \setminus \{1, -1\}$ について



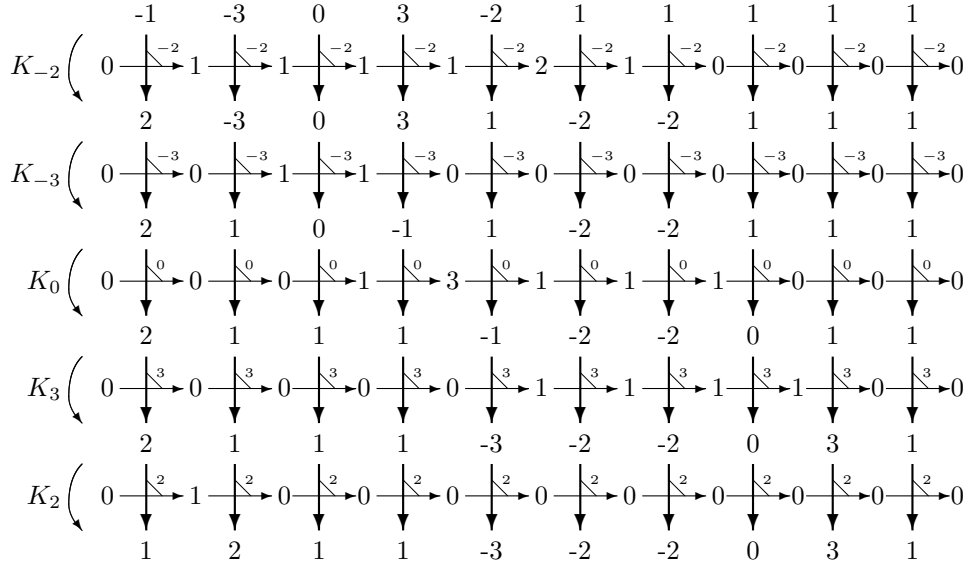
横線上の数 l の意味は , その場所を通過する粒子 j の個数である .

L_j を用いて K_j は以下のように構成される . オートマトンの任意の状態 $(\dots, b_i, b_{i+1}, \dots) \in W$ について , 境界条件 (1) により , $m' < m$ ならば $b_{m'} = 1$ となる整数 m が存在する . そのような m を一つ固定する . オペレーター $K_j : W \rightarrow W$ による $(\dots, b_i, b_{i+1}, \dots)$ の像 $(\dots, c_i, c_{i+1}, \dots)$ は全ての $m' < m$ について $c_{m'} = b_{m'}$ とする . 残りの c_m, c_{m+1}, \dots は L_j の合成



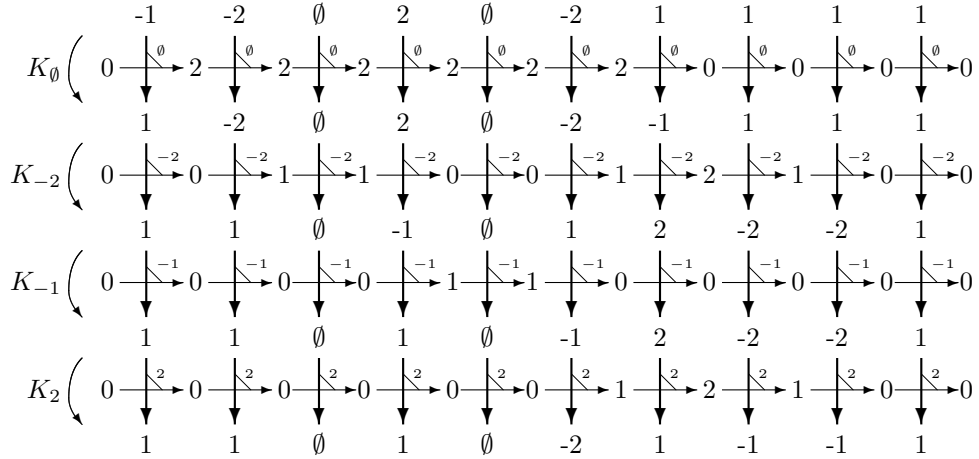
により定める . この規則により像 $(\dots, c_i, c_{i+1}, \dots)$ は m の選択によらず一意的に決定される . $A_n^{(1)}$ の場合は [11] も参照のこと .

例 1. $B_3^{(1)}$ オートマトン . $T = K_2 K_3 K_0 K_{-3} K_{-2}$.



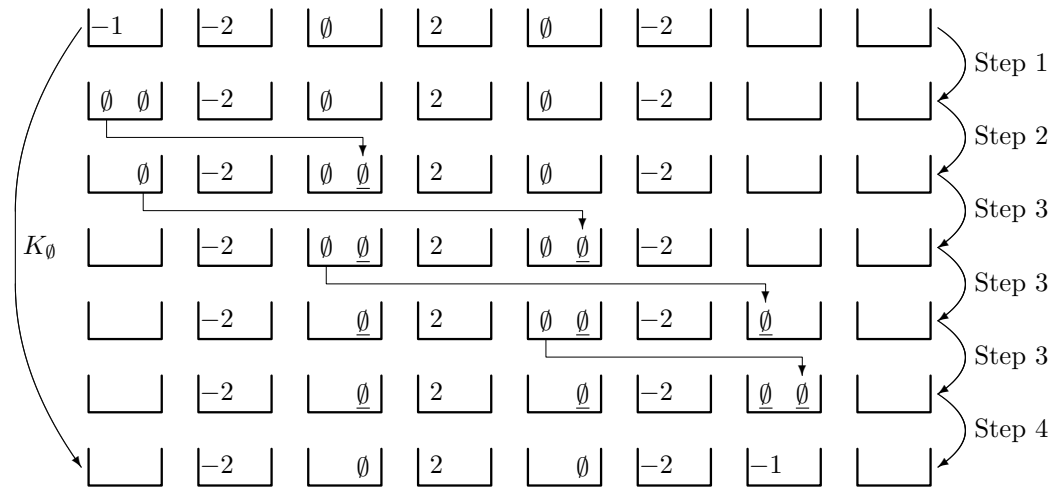
$T : (-1, -3, 0, 3, -2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) \mapsto (1, 2, 1, 1, -3, -2, -2, 0, 3, 1, \dots)$.

例 2. $A_4^{(2)}$ オートマトン. $T = K_2 K_{-1} K_{-2} K_\emptyset$.



$$T : (-1, -2, \emptyset, 2, \emptyset, -2, 1, 1, 1, 1, \dots) \mapsto (1, 1, \emptyset, 1, \emptyset, -2, 1, -1, -1, 1, \dots).$$

例 1,2 とともに略した部分は全て 1 と了解する . 2 節の Step1-4 に従い , 例 2 で K_\emptyset が作用する過程を詳しく書けば次のようになる .



2 節の注 3 にあるように , \emptyset について , 移動前のものと移動後のものを識別するために後者には下線を付した.

3 ソリトンとその散乱

オートマトンの状態の一部であるパターン $\overbrace{2, \dots, 2}^{y_2}, \overbrace{-3, \dots, -3}^{y-3}$ を $2^{y_2} (-3)^{y-3}$ などと記す．各系列について非負整数の組 $\{y_b\}$ から次のパターンを指定する．

$$A_n^{(1)} : (n+1)^{y_{n+1}} \dots 3^{y_3} 2^{y_2}.$$

$$A_{2n-1}^{(2)} : (-2)^{y-2} (-3)^{y-3} \dots (-n)^{y-n} n^{y_n} \dots 3^{y_3} 2^{y_2}.$$

$$A_{2n}^{(2)} : (\emptyset)^{y_0} (-1)^{y-1} (-2)^{y-2} \dots (-n)^{y-n} n^{y_n} \dots 2^{y_2} 1^{y_1},$$

$$y_0 \in \{0, 1\}, y_1 = y_{-1}.$$

$$B_n^{(1)} : (-2)^{y-2} (-3)^{y-3} \dots (-n)^{y-n} 0^{y_0} n^{y_n} \dots 3^{y_3} 2^{y_2}, \quad y_0 \in \{0, 1\}.$$

$$C_n^{(1)} : (-1)^{y-1} (-2)^{y-2} \dots (-n)^{y-n} n^{y_n} \dots 2^{y_2} 1^{y_1}, \quad y_1 = y_{-1}.$$

$$D_n^{(1)} : (-2)^{y-2} (-3)^{y-3} \dots (-n)^{y-n} n^{y_n} \dots 3^{y_3} 2^{y_2}, \quad y_n y_{-n} = 0.$$

$$D_{n+1}^{(2)} : (\emptyset)^{y_0} (-1)^{y-1} (-2)^{y-2} \dots (-n)^{y-n} 0^{y_0} n^{y_n} \dots 2^{y_2} 1^{y_1},$$

$$y_0, y_1 \in \{0, 1\}, y_1 = y_{-1}.$$

各パターンの長さ，即ち登場する B の元の個数を v とする． $A_{2n}^{(2)}, C_n^{(1)}, D_{n+1}^{(2)}$ の場合は空箱 $1 \in B$ もパターンの一部としていることに注意する．オートマトンの状態において，これらのパターンが十分多くの空箱 $1 \in B$ により他のパターンと隔てられているとき振幅 v のソリトンという．具体的には自身の右側に空箱が v 個連続していれば十分である．データ $\{y_b\}$ はソリトンの内部自由度のラベルである．時間発展 $T(2)$ により，振幅 v のソリトンはそのパターンを保ったまま速度 v で右に進む．（これをチェックするのは良い練習問題．）従って，振幅の大きいソリトンを小さいものの左に配置して時間発展させると衝突がおこる．このようなソリトンの散乱に関して以下の事実が証明されている．

(a) 振幅は衝突の前後で個別に保存される．

(b) 2体の散乱規則は量子群の組み合わせ R で特徴づけられる．

(c) 多重ソリトンの散乱は2体散乱の積に因子化し，散乱の順序によらない．主張の正確な意味と証明は [10] に譲り，ここでは例に沿って (a) と (b) を説明しよう． $A_n^{(1)}$ の場合は [28] も参照のこと．

例 3. $A_3^{(1)}$ オートマトン. 時間発展 T^t ($0 \leq t \leq 5$) の様子の例を与える．

$$\begin{aligned} t=0 & : \dots 11144322111143311111111111111111 \dots \\ t=1 & : \dots 1111111144322114331111111111111111 \dots \\ t=2 & : \dots 11111111111114432243311111111111111 \dots \\ t=3 & : \dots 111111111111111113224443311111111111 \dots \\ t=4 & : \dots 1111111111111111111132211444331111111 \dots \\ t=5 & : \dots 111111111111111111111132211114443311 \dots \end{aligned}$$

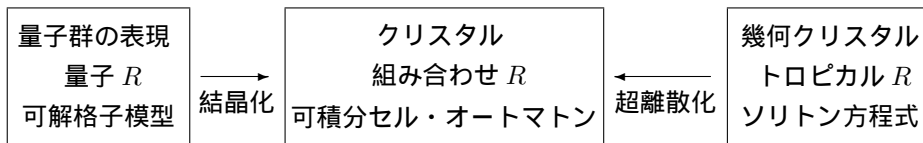
例 4. $C_3^{(1)}$ オートマトン . スペースを一様にするため $-j$ を \bar{j} と書く .

t=0 : ... 11 $\bar{1}$ 2 $\bar{2}$ 311111 $\bar{2}$ 3 $\bar{2}$ 11111111111111111111 ...
t=1 : ... 11111111 $\bar{1}$ 2 $\bar{2}$ 3111 $\bar{2}$ 3 $\bar{2}$ 11111111111111111111 ...
t=2 : ... 111111111111 $\bar{1}$ 2 $\bar{2}$ 311 $\bar{2}$ 2 $\bar{3}$ 21111111111111111111 ...
t=3 : ... 1111111111111111 $\bar{1}$ 3111 $\bar{2}$ 2 $\bar{3}$ 2111111111111111 ...
t=4 : ... 11111111111111111111 $\bar{1}$ 311111 $\bar{2}$ 2 $\bar{3}$ 2111111111 ...
t=5 : ... 11111111111111111111 $\bar{1}$ 31111111 $\bar{2}$ 2 $\bar{3}$ 211 ...

例 3 では始状態における二つのソリトン 44322 と 433 が衝突して終状態のソリトン 322 と 44433 へと散乱している . 同様に例 4 では $\bar{1}2\bar{2}31$ と $\bar{2}3\bar{2}$ が衝突して $\bar{1}31$ と $\bar{2}2\bar{2}3\bar{2}$ に散乱している . (a) にあるとおり , 振幅 5 と 3 は衝突の前後で不変である . 一方内部自由度は非自明に変化している . また , 大きいソリトンの左端は速度 5 で右に進んでいるが , それを結ぶ線は散乱の前後ですれており , 小さいソリトンでも同様である . これを位相のずれという . このように , 内部自由度の変化と位相のずれを併せた情報のことを 2 体の散乱規則という . (b) はそれが量子群の組み合わせ R と呼ばれるもの (次節参照) に一致することを主張している . 例 3 でソリトン $4^{y_4}3^{y_3}2^{y_2}$ を (y_2, y_3, y_4) と記すと , 散乱による内部自由度の変化は $(2, 1, 2) \times (0, 2, 1) \rightarrow (2, 1, 0) \times (0, 2, 3)$ と書ける . これは次節 (3) で定義される $A_2^{(1)}$ の組み合わせ $R = R_{l,k}$ で $(l, k) = (5, 3)$ としたものの作用と一致していることが確認できる . ($x = (2, 1, 2), y = (0, 2, 1)$ のとき $P_0 = 5, P_1 = 7, P_2 = 6$ である .) また例 3 で位相のずれは 3 であるが , これは $P_0 + k - l = 5 + 3 - 5$ として与えられる . このように $A_3^{(1)}$ オートマトンにおけるソリトンの 2 体散乱は $A_2^{(1)}$ の組み合わせ R と一致するのである . 他の 6 系列のオートマトンも同様の性質をもつ [10].

4 三つの R

これまで紹介したオートマトンの背景を次の模式図に沿って説明しよう .



各枠内で下にあるものほど , 物理系のモデルとしてユーザーエンドに近く , 上に行く程それらを支配する抽象的な数理構造となる . 最下行にはセル・オートマトンを中心に , 統計力学と非線形波動における可積分な模型が配置されている . これら模型の局所的ダイナミクスや転送行列を指定する最も基本的

な対象物が三つの R であり、数学的には量子 R は有限次元行列、組み合わせ R は有限集合の間の全単射、トポピカル R は有限個の変数の組に対する双有理変換である。各 R は、更にその上にある構造から完全に特徴づけられる。しかもこの特徴づけのパターンは三つの R でほぼ同一である。現時点 (2003 年 3 月) では一番右の枠は未だ確立されたものではない。既存の全てのソリトン方程式にトポピカル R や幾何クリスタルが付随するわけではない。私観では、量子群に起源を持つセル・オートマトンは、超離散化の逆像として、離散ソリトン方程式の中に全正值性等の性質を持ったあるクラスを規定しているように思われる。

以上の事情について $A_n^{(1)}$ を例として大雑把ながらも説明を試みる。正整数 l に対し、有限集合 $B_l = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x_1 + \dots + x_{n+1} = l\}$ を定める。積集合の元 $(x, y) \in B_l \times B_k$ に対し、 $x' = (x'_1, \dots, x'_{n+1})$, $y' = (y'_1, \dots, y'_{n+1})$ を

$$\begin{aligned} x'_i &= y_i + P_i - P_{i-1}, & y'_i &= x_i + P_{i-1} - P_i, \\ P_i &= \max\left\{\sum_{j=k}^{n+1} x_{i+j} + \sum_{j=1}^k y_{i+j} \mid 1 \leq k \leq n+1\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

と指定する。但し全ての添え字は周期 $n+1$ で考える。このとき $R: (x, y) \mapsto (x', y')$ により定義される写像 $R = R_{l,k}$ は $B_l \times B_k$ から $B_k \times B_l$ への全単射になることが知られており、組み合わせ R [23, 6] と呼ばれる。

$A_n^{(1)}$ オートマトンのダイナミクスはこの組み合わせ R によって支配される。これを見るためにまず集合 B_l とオートマトンの局所状態の集合 B (cf. 2 節) を 1:1 対応 $B_l \ni (\dots, 0, x_j = 1, 0, \dots) \leftrightarrow j \in B$ により同一視する。多重積 $B_l \times (\dots \times B \times B \times \dots)$ に対し、 $R_{l,1}$ を繰り返し作用させれば $(\dots \times B \times B \times \dots) \times B_l$ の形に持っていける。特に B_l の元として $(l, 0, \dots, 0)$ を選んだ際にこの操作が (1) の $W \subset (\dots \times B \times B \times \dots)$ に引き起こす作用を T_l と書くと、 T_∞ はオートマトンの時間発展 T (2) に一致することが知られている。 T_1, T_2, \dots は互いに可換な「高階」時間発展に相当する。では組み合わせ R 自体の背景は何だろうか。ここに量子群とクリスタルが登場する。

まず模式図の左枠について説明しよう。今の場合 $U_q(A_n^{(1)})$ と呼ばれる量子群とその表現であるベクトル空間 V_l が関与する。量子群のテンソル積表現として二つのベクトル空間 $V_l \otimes V_k$ と $V_k \otimes V_l$ の同型を与える行列が量子 R である。その行列要素を局所ボルツマン重率として定式化されるのが可解格子模型である。量子 R は Yang-Baxter 方程式 [2, 15] を満たし、転送行列は可換な族をなす。これらは皆量子変形のパラメータ q に依存している。

模式図の左枠で $q \rightarrow 0$ とすると中央の枠に移行する。これを結晶化という。その際表現空間 V_l は上記の集合 B_l に幾つかの構造を付加したものに移行す

る．これを結晶基底 (crystal base)[17] といい，その組み合わせ論的な性質を抽出したものがクリスタル [16] である．集合としては $B_l, B_l \times B_k, B_k \times B_l$ 等はクリスタルの例である．クリスタルのテンソル積の同型を与える全単射が組み合わせ R (3) に他ならない．また可解格子模型の転送行列の結晶化に対応するのが先に述べたオートマトンの可換な時間発展 $T_1, T_2, \dots, T_\infty$ である．このうち特に $T_\infty = T$ (2) は，アフィン・ワイル群の平行移動とみなすことができ，各因子 K_j は本質的にワイル群の単純鏡映であることが知られている [8, 9]．時間発展として T_∞ の代わりに T_1, T_2, \dots を採用することは運搬車つき箱玉系 [25] に相当する．これにより，ソリトンの散乱などの基本的な様相は変化しないが，保存量の構成などに役立つ．以上の内容の一部についてはもう少し詳しい日本語の解説 [18] もある．

最後に模式図の右枠について説明する．組み合わせ R においては x_i, y_i は非負整数であったが，今度はそれらを勝手な変数とみなして $x' = (x'_1, \dots, x'_{n+1})$, $y' = (y'_1, \dots, y'_{n+1})$ を

$$x'_i = y_i \frac{P_i}{P_{i-1}}, \quad y'_i = x_i \frac{P_{i-1}}{P_i}, \quad P_i = \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=k}^{n+1} x_{i+j} \prod_{j=1}^k y_{i+j} \quad (4)$$

により指定しよう．敢えて (3) と同じ記号を用いている．(4) により定まる有理変換 $R : (x, y) \mapsto (x', y')$ をトロピカル R [31, 19, 20] と呼ぶ．組み合わせ R (3) に戻るには $+, \times, /$ をそれぞれ $\max, +, -$ に置き換えればよい．このような操作が超離散化 [29] であり，等式 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log(\exp(a/\epsilon) + \exp(b/\epsilon)) = \max(a, b)$ などを拠り所として極限操作により実現できる．超離散化は $ac + bc = (a+b)c$ を $\max(a+c, b+c) = \max(a, b) + c$ に移すので分配則を保つ．従って例えば等式 $\max(a, b) + \max(u, v) = \max(a+u, a+v, b+u, b+v)$ を証明するのに「 $(a+b)(u+v) = au + av + bu + bv$ の超離散化です」の一言で片付けられるという威力を持つ．しかし例えば $a+b$ も $2a+3b$ も $\max(a, b)$ に移行することから判るように，超離散化の逆操作は確定しない．故に何を指導原理として超離散化の無数の逆像の中から一つを選択するかが鍵となる．ここでは仮に可積分性という観点から最も標準的なものがあるとしてそれをトロピカル化と呼ぶことにしよう．この意味でクリスタルのトロピカル化に相当する構造が幾何クリスタル [3] である．トロピカル R は組み合わせ R のトロピカル化である．それは Yang-Baxter 方程式を満たし，幾何クリスタルの積の同型として特徴づけられ，適当な変数変換により可積分な差分的戸田方程式 [14] と同定できることが知られている． $A_{2n-1}^{(2)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の系列でも同様の事実が成立する [19, 20] ．

5 むすび

本稿で扱った 7 系列のオートマトンは「非例外型」と呼ばれる量子群のクリスタルの系列 [16] に付随している．これらは皆，箱の容量を変えて非一様にしたたり，周期的境界条件の場合へと拡張することが出来る． $A_n^{(1)}$ の非一様系については [6]， $A_1^{(1)}$ の周期系については [32] を参照されたい．またベテ仮説 [2] に関連して箱玉系の分配関数や逆散乱法の定式化 [21] も試みられている．これら可積分セル・オートマトンが量子群に関連する数理論の産物というだけに留まらず，意義ある応用をもつかは今後の課題である．

本稿の内容について共同研究をして下さった多くの方にこの場を借りて感謝いたします．

参考文献

- [1] Ablowitz, M.J., and Segur, H., *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [2] Baxter, R. J., *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [3] Berenstein, A., and Kazhdan, D., Geometric and unipotent crystals, *Geometric and Functional Analysis, Special Volume, Part I* (2000), 188–236.
- [4] 超離散, 数理科学 サイエンス社 No.435 (1999).
- [5] Fukuda, K., Okado, M., and Yamada, Y., Energy functions in box ball systems, *International Journal of Modern Physics*, **A15** (2000) 1379–1392.
- [6] Hatayama, G., Hikami, K., Inoue, R., Kuniba, A., Takagi, T., and Tokihiro, T., The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors, *Journal of Mathematical Physics*, **42** (2001) 274–308.
- [7] Hatayama, G., Kuniba, A., and Takagi, T., Soliton cellular automata associated with crystal bases, *Nuclear Physics*, **B577**[PM] (2000), 619–645.
- [8] Hatayama, G., Kuniba, A., and Takagi, T., Factorization of combinatorial R matrices and associated cellular automata, *Journal of Statistical Mechanics*, **102** (2001), 843–863.

- [9] Hatayama, G., Kuniba, A., and Takagi, T., Simple algorithm for factorized dynamics of \mathfrak{g}_n -automaton, *Journal of Physics*, **A34** (2001), 10697-10705.
- [10] Hatayama, G., Kuniba, A., Okado, M., Takagi, T., Yamada, Y., Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases, *Contemporary Mathematics*, **297** (AMS 2002), 151–182.
- [11] Hikami, K., Inoue, R., and Komori, Y., Crystallization of the Bogoyavlensky lattice, *Journal of Physical Society of Japan*, **68** (1999), 2234–2240.
- [12] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 東京, 1992 .
- [13] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 東京, 2003 .
- [14] Hirota, R., and Tsujimoto, S., Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, *Journal of Physical Society of Japan*, **64** (1995), 3125–3127.
- [15] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク, 東京, 1990.
- [16] Kang, S.J., Kashiwara, M., and Misra, K.C., Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras, *Compositio Mathematica*, **92** (1994), 299–325
- [17] 柏原正樹, 量子群の結晶化, *数学*, 岩波書店, **44**(1992), 330–342.
- [18] 国場敦夫, ソリトンセルオートマトンとクリスタル理論, 非線形波動のメカニズム—現象とモデルの数理—, 九州大学応用数理研究所 研究集会報告 11ME-S4 (2000), 96–102.
- [19] Kuniba, A., Okado, M., Takagi, T., Yamada, Y., Geometric crystal and tropical R for $D_n^{(1)}$, [math.QA/0208239](https://arxiv.org/abs/math/0208239).
- [20] Kuniba, A., Okado, M., Takagi, T., Yamada, Y., Tropical R and tau functions, [math.QA/0303088](https://arxiv.org/abs/math/0303088).
- [21] 国場敦夫, 尾角正人, 高木太一郎, 山田泰彦, 箱玉系の頂点作用素と分配関数, 可積分系の研究の新展開—連続・離散・超離散—, 数理解析研講究録, **1302** (2003) 91–107.

- [22] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗, ソリトンの数理, 岩波講座応用数学, 東京, 1993.
- [23] Nakayashiki, A., and Yamada, Y., Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica, New Series* **3** (1997), 547–599.
- [24] D. Takahashi, On some soliton systems defined by using boxes and balls, *International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications NOLTA*, 1993, 555–558.
- [25] Takahashi, D., and Matsukidaira, J., Box and ball system with a carrier and ultra-discrete modified KdV equation, *Journal of Physics, A* **30** (1997), L733 – L739.
- [26] 高橋大輔, 薩摩順吉, 単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて, *日本応用数学会論文誌*, **1** (1991), 41–60.
- [27] 戸田盛和, 非線形波動とソリトン, 日本評論社, 東京, 1983.
- [28] Tokihiro, T., Nagai, A., and Satsuma, J., Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization, *Inverse Problems*, **15** (1999), 1639–1662.
- [29] 時弘哲治, 薩摩順吉, 松木平淳太, 高橋大輔, 可積分セルオートマトン – ソリトン方程式の離散化の果てに何が見えたか –, *日本物理学会誌*, **52** (1997), 276–279.
- [30] Wolfram, S. (ed.), *Theory and applications of cellular automata*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [31] Yamada, Y., A birational representation of Weyl group, combinatorial R -matrix and discrete Toda equation, *Physics and Combinatorics 2000* (A. N. Kirillov and N. Liskova eds.) World Scientific (2001), 305–319.
- [32] Yura, F., Tokihiro, T., On a periodic soliton cellular automaton, *Journal of Physics, A* **35** (2002), 3787–3801.

A class of one dimensional multi-state cellular automata is introduced. Their dynamics is described as a motion of particles and anti-particles that undergo pair-annihilation and creation through neutral bound states. The particles and anti-particles can form special configurations called solitons. Solitons remain stable under collisions exhibiting only phase shifts and exchange of internal degrees of freedom. The automata are integrable and associated with quantum groups and related mathematical structures such as crystal bases. They provide a unified perspective to understand the symmetry and integrability of the automata incorporating the earlier approach to the box-ball system by ultradiscretization.