ベーテ仮説と差分方程式

東京大学大学院総合文化研究科　国場敦夫

1998 年 3 月 25 日

1　はじめに

Bethe Ansatz は『ベーテ仮説』かそれとも『ベーテ仮設』かという問がある。[1] 後者の支持者は沢山いる。確かにベーテ自身は有名な 1931 年のドイツ語の原論文 [Be][2] の中で、r 体の波動関数の形を仮設した後、固有関数を構成し、今で言う組合せ論的完全性まで証明しているので、『仮説』と呼ぶのは適当でないかもしれない。むしろ ベーテ自身による coordinate ベーテ仮設以降、多くの人々が『代数的』、『熱力学的』、『解析的』、『組合せ論的』、『ネステッド』 そして時に『ハイレベル』Bethe Ansatz 等という version にまで拡張しまくったのであるが、そのような拡張や応用の中にはベーテと同レベルの『仮設』には達していない、『仮説』と呼んだ方が無難なものが少なからずあるのではと感じる。一方そういう『仮説』の中にはきちんとした数学的『予想』に昇格するものもある。その意味で言うとこの報告書は『ベーテ仮説』と『予想』の中間くらいに位置する。その内容は主に [K1]–[KS2] に基づく。Bethe Ansatz は模型を解くための手段であるというのが本来の自然な発想であるが、ここではあまりそれにとらわれず、むしろ色々なよそ見を楽しもうという気持で書く。そこに著者の偏った見方が随分介入してしまっている事を御容赦願いたい。中心となるのはベーテ仮説にまつわる差分方程式であるが、これらが Painlevé 方程式のような世界と関係するかは判らない。

Bethe Ansatz の裾野はあまりに広大であり、[3] ここで紹介する aspect はほんの一角に過ぎない事を強調しておく。ここで触れなかった沢山の話題の中には、少し前になるが、ある特殊な熱力学的ベーテ仮説方程式と Painlev’e III との関係 [CFIV, TW, Z] がある。また、変形ビラソロ代数 [SKAO] のカレントと 解析的ベーテ仮説の dressed vacuum form (DVF、後出) との類似

[1] 熊本大学の研究会 (1997 年 12 月 14–17 日) でも時弘哲治さんが指摘された。

[2] D. C. Mattis 編集の *The Many-Body Problem, An Encyclopedia of Exactly Solved Models in One Dimension* (World Scientific 1993) に全英訳が掲載されている。最後の文は Fermi に対する謝辞であるが、その前の文は “In a future paper, this method will be extended to [three-dimensional] space lattices[11], and its physical implications for cohesion, ferromagnetism and electrical conductivity, will be derived.” となっており、[11] には “Ed. note: this rash promise has apparently not been kept” という注釈が着いている。

[3] 例えば [Bax, Ga, KBI] などを参照。

性 [FR] なども報告されている。これらについて将来まとまった解説が出る事を期待する。

この報告書のもとになった研究を共にしてくださった方々にこの場を借りて感謝いたします。

2　解析的ベーテ仮説

転送行列の対角化は可解格子模型の研究の基本ステップの一つである。解析的ベーテ仮説とはシステムサイズ 有限の row-to-row 転送行列の固有値公式を作り出す仮説的処方せんである。代数的 ベーテ仮説等で対角化を実行するという一般には骨の折れる作業を スキップしてしまい、固有ベクトルを作らずして固有値だけを先取りする。 その正しさの一般的証明はないが、反例も知られていない。その処方せんの簡単さのために、代数的 ベーテ仮説よりはるかに広い場合に適用されている。例えば [R1, R2, KS1, KOS] を参照のこと。対角化の苦労はモデルに依っても、最終的に求まる固有値は普遍的な形をしているという経験的事実からすると自然なアイデアとも言える。数学的にみると解析的ベーテ仮説は Yangian ないし 量子アフィンリー代数の有限次元表現の一種の指標理論と考えられる。この章では最も簡単な sl_2 の場合にその辺の『感じ』を紹介する。

2 次元正方格子上の 6 頂点模型 [Bax] を考えよう。Boltzmann 重率は $R_u(\pm,\pm,\pm,\pm) = [2+u]$, $R_u(\pm,\mp,\pm,\mp) = [u]$ $R_u(\pm,\mp,\mp,\pm) = [2]$。ここで R の 四つの引数は複合同順で局所的な状態 $+$ と $-$ を表し、頂点 (サイト) の左側のエッジから反時計まわりに並んでいるとする。関数 $[u]$ は

$$[u] = \frac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}} \tag{2.1}$$

で定義される。u はスペクトルパラメタと呼ばれる複素パラメタで、 q は generic な定数とする。よく知られているように、Boltzmann 重率を行列要素として R 行列 $R_{W_1,W_1}(u)$ を構成すると、Yang-Baxter 方程式が成立する。ここで添字は R が 2 次元の $U_q(A_1^{(1)})$ の表現 W_1 のテンソル積にはたらく事を示す。(一般に $m+1$ 次元の 既約表現を W_m と書くことにする。) 6 頂点模型の row-to-row 転送行列は 次のより一般の行列 の $m=1$ の場合に相当する。

$$T_m(u) = \mathrm{Tr}_{W_m}\big(R_{W_m,W_1}(u-w_1)\cdots R_{W_m,W_1}(u-w_N)\big). \tag{2.2}$$

ここで N はシステムのサイズ、 $w_1,\ldots,w_N$ は複素パラメタで局所相互作用の非一様性を表す。$m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$。量子逆散乱法の用語でいうと、これは auxiliary space が W_m で quantum space $W_1^{\otimes N}$ にはたらく row-to-row 転送行列である。(有限次元表現自体がスペクトルパラメタによるので、もう少し正確には

auxiliary space が $W_m(u)$ で quantum space が $\otimes_{j=1}^{N} W_1(w_j)$。) Yang-Baxter 方程式のおかげで $[T_m(u), T_{m'}(u')] = 0$ が成立し、これらは同時対角化できる。従って、その固有値もまた同じ記号 $T_m(u)$ で書く事にする。

重要なのは $T_m(u)$ のスペクトルであるが、まず $T_1(u)$ について [Bax] から引用しよう。

$$T_1(u) = \frac{Q(u-1)}{Q(u+1)}\phi(u+2) + \frac{Q(u+3)}{Q(u+1)}\phi(u), \tag{2.3}$$

$$Q(u) = \prod_{j=1}^{n}[u - v_j], \quad \phi(u) = \prod_{j=1}^{N}[u - w_j]. \tag{2.4}$$

ここで $0 \leq n \leq N/2$ は固有ベクトルに含まれる $-$ 成分の数で、$T_1(u)$ によって保たれる。$u_j \in \mathbf{C}$ はベーテ方程式 (Bethe ansatz equation, BAE)

$$-\frac{\phi(v_k+1)}{\phi(v_k-1)} = \frac{Q(v_k+2)}{Q(v_k-2)} \tag{2.5}$$

の根である。 根を一つ選択するごとに (2.3) に代入して固有値が得られる。

上の結果に関して幾つかの視察をしよう。

(i) 固有値は 『dressed vacuum form (DVF)』をしている。$+, +, \ldots, +$ という $n = 0$ のベクトル (vacuum vector) は自明に固有ベクトルであり、その固有値も簡単に

$$\prod_{j=1}^{N} R_{u-w_j}(+,+,+,+) + \prod_{j=1}^{N} R_{u-w_j}(-,+,-,+) = \phi(u+2) + \phi(u) \tag{2.6}$$

と求まる。これを仮に vacuum form と呼ぼう。[4] これと (2.3) を見比べると一般の固有値にも vacuum form にある $\phi(u+2), \phi(u)$ が入って来ている。但し $n = 0$ の時に 1 になる "dress" Q/Q を伴って、という意味で DVF [R1] と呼んでいる。特に DVF $T_1(u)$ は 2 項の和であるが、この 2 というのは auxiliary space の次元 $\dim W_1 = 2$ に由来している。

(ii) DVF (2.3) は u 有限 では極を持たない。(2.3) において $u = v_k - 1$ は見かけの 極であって、実際は BAE (2.5) により 2 項からの留数が相殺している。Boltzmann 重率を pole-free に規格化して出発しているので、それから構成される転送行列及びその固有値 もそうであるべき。

(iii) (2.3) は R 行列 の持つ周期性、反転関係式や $|u| \to \infty$ での漸近的振舞から従う性質を持つ。例えば (2.3) は

$$(q - q^{-1})^N q^{-N+\sum_j w_j} \lim_{q^u \to \infty} q^{-Nu} T_1(u) = q^{N-2n} + q^{2n-N} \tag{2.7}$$

を満たすが、これは R 行列と $T_1(u)$ の定義のみからも導かれる性質である。

---

[4] これは必ずしも最大固有値とは限らない。

Reshetikin の意味での 解析的 ベーテ仮説とは [R1]、おおよそ (i)-(iii) を要請すると転送行列の固有値は決ってしまう、という仮説である。即ち、まず (i) の vacuum form (さすがにこれくらいは規格化を定めるためにも求めておく) に dress を 未知関数として付けて Ansatz DVF を set up しておく。次に (ii)、(iii) の性質を要請するとそれが一意的整合的に決まり、しかも (ii) からはベーテ方程式も出て来るという具合である。本来格子模型の転送行列 (ここでは高々 trigonometric な頂点模型を念頭に置いている) は、普遍 R 行列 とその像を考える表現空間 (auxiliary space と quantum space)、そして規格化を定めれば一意的に決まっている。従って、その固有値もこれらを指定するデータのみで記述されるべきものであろう。7 章ではもう少しそのような述べ方をしてみる。(それは解析的ベーテ『仮説』よりもう少し数学的『予想』に近い。)

ところで (2.7) は $sl(2)$ の 2 次元表現 W_1 の指標と見なせる。この意味で $T_1(u)$ はその スペクトルパラメタ依存版と言ってよい。[5] この見方は一般の $T_m(u)$ の固有値とそれが満たす関数方程式を考えるとより一層自然となる。

$$T_m(u+1)T_m(u-1) = T_{m+1}(u)T_{m-1}(u) + g_m(u) \qquad m \geq 0, \tag{2.8}$$

$$g_m(u) = \prod_{k=0}^{m-1} \phi(u+2k-m)\phi(u+4+2k-m). \tag{2.9}$$

(2.8) は 定義 (2.2) と $U_q(A_1^{(1)})$ 加群の short exact sequence $0 \to W_0(u+m+1) \otimes W_0(u-m-1) \to W_m(u+1) \otimes W_m(u-1) \to W_{m-1}(u) \otimes W_{m+1}(u) \to 0$ [CP1] から従う。[6] (2.3) と $T_0(u) = 1$ を初期条件としてこれを解くと

$$T_m(u) = \Bigl(\prod_{k=1}^{m-1} \phi(u+m+1-2k)\Bigr) \sum_{j=0}^{m} \frac{Q(u-m)Q(u+m+2)\phi(u+m+1-2j)}{Q(u+m-2j)Q(u+m+2-2j)} \tag{2.10}$$

となる。もっと見やすくするために

$$\boxed{1} = \frac{Q(u-1)}{Q(u+1)}\phi(u+2), \quad \boxed{2} = \frac{Q(u+3)}{Q(u+1)}\phi(u) \tag{2.11}$$

と置こう。(左辺の box は u に依る。) (2.3) は $T_1(u) = \boxed{1} + \boxed{2}$ となり、(2.10) は

$$T_m(u) = \sum_{j=0}^{m} \overbrace{\boxed{1 \;\; \cdots \;\; 1}}^{m-j}\overbrace{\boxed{2 \;\; \cdots \;\; 2}}^{j} \tag{2.12}$$

と表される。 ここで tableau は関数 (2.11) でスペクトルパラメタ u を左から右に $u-m+1, u-m+3, \ldots, u+m-1$ と等間隔にずらしなが

[5] 『A は B の スペクトルパラメタ依存版』というのは長いので、あまり格好よくないけれど、V. F.R. Jones にならって『A は B の Baxterization』と言うことにする。

[6] Fusion procedure と呼ばれる。

ら m 個掛けたものと了解する。良く知られているように、$0 \leq j \leq m$ に対応する上の tableau は $sl(2)$ の スピン $m/2$ 表現のウエイトベクトルをラベルする semi-standard tableaux である。$u \to \infty$ の極限で $(q - q^{-1})^{mN} q^{-mN+m\sum_j w_j} \lim_{q^u \to \infty} q^{-mNu} T_m(u) = Q_m := \sum_{j=0}^{m} q^{(N-2n)(m-2j)}$ も成立している。この意味でも $T_m(u)$ の DVF (2.10),(2.12) は auxiliary space $W_m(u)$ の指標に相当する。[7] その際 関数方程式 (2.8) は指標関係式の役割をする。上の Q_m は通常の意味での指標関係式

$$Q_m^2 = Q_{m+1} Q_{m-1} + 1 \tag{2.13}$$

を満たしている。さて、ベーテ方程式 (2.5) のもとで $T_m(u)$ は一般の m で pole-free になっているだろうか? 解析的ベーテ仮説の立場からはこれは大切なチェックポイントである。これを調べるため、 (2.8) を 用いて $T_m(u)$ を $T_1(u)$ によって表すと次のようになる。

$$det \begin{pmatrix} T_1(u-m+1) & g_1(u-m+2) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & T_1(u-m+3) & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & T_1(u+m-3) & g_1(u+m-2) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & T_1(u+m-1) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

先に注意したように $u \to \infty$ では T_m は $sl(2)$ の $m+1$-次元既約表現の指標 Q_m ($= s_{(m)}$: Schur 関数) になる。従ってその極限で (2.14) は 古典的に Jacobi-Trudi formula [Ma] と呼ばれる指標公式に帰着する。(2.14) はその Baxterization になっており、ここでは quantum Jacobi-Trudi formula と呼ぶことにする。そのご利益の一つとして $T_m(u)$ が 確かに pole-free である性質が $T_1(u)$ のそれから直ちにしたがう。これは (2.10) を調べるより簡明である。

ここまでのまとめとして、可解格子模型の転送行列に特徴的な性質として関数方程式 (2.8) と quantum Jacobi-Trudi formula (2.14) が成立すること、その固有値 を与える DVF が (一般には解析的ベーテ仮説によって) tableau sum (2.12) のように構成されることを確認しておく。

この章のしめくくりとして熱力学的ベーテ仮説 (Thermodynamic Bethe Ansatz, TBA) との関係もコメントしておこう。まず (2.9) は

$$g_m(u-1) g_m(u+1) = g_{m+1}(u) g_{m-1}(u)$$

を満たす事に注意する。この事と (2.8) を用いると $Y_m(u) = T_{m+1}(u) T_{m-1}(u) / g_m(u)$ という combination は

$$Y_m(u-1) Y_m(u+1) = \frac{T_{m+1}(u-1) T_{m+1}(u+1) T_{m-1}(u-1) T_{m-1}(u+1)}{g_m(u-1) g_m(u+1)}$$

[7] [CP2] にもベーテ仮説の視点とは独立に、表現論的な観点から同様の指標が $Y(sl_2)$ について考察されている。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(T_{m+2}(u)T_m(u)+g_{m+1}(u))(T_{m-2}(u)T_m(u)+g_{m-1}(u))}{g_{m+1}(u)g_{m-1}(u)} \\
&= (Y_{m+1}(u)+1)(Y_{m-1}(u)+1) \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

という具合に $g_m(u)$ に依らない差分方程式を満たす事が判る。実はこの最後の Y の式は、熱力学的ベーテ (TBA) 方程式と呼ばれるものの disguised form になっている。disguised と言ったのは、通常 TBA 方程式は非線形の積分方程式だからである。TBA [YY] は可解な一次元量子系の有限温度状態を調べる一般的な scheme である。TBA 方程式は自由エネルギー極小のための必要条件として現れ、中心的役割を果たす。非線形の積分方程式から (2.15) のような差分方程式をどのように抽出するかをもの凄く大雑把に説明しよう。今の場合 TBA 方程式は有限温度の XXZ 模型に関係するものでおよそ次のような形をしている。

$$
\begin{aligned}
\log Y_m(u) &= \frac{f_m(u)}{T} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} s(u-v)\log\left((1+Y_{m-1}(v))(1+Y_{m+1}(v))\right)dv, \qquad (2.16) \\
s(u) &= \frac{1}{4\cosh\frac{\pi u}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}}{2\cosh x}dx. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

ここで T は温度で $f_m(u)$ は既知の関数である。まず形式的に T 無限大と思って (2.16) の右辺第一項を落とす。更に両辺をフーリエ変換した後、$\log Y_m(u)$ は $|Imu| \leq 1$ で正則と仮定してしまう。すると右辺の分母にある $2\cosh x = e^x + e^{-x}$ は左辺に跳ね上げて $u \to u \pm i$ という差分演算子の和と解釈できる。あとはフーリエ逆変換してから両辺の log をはずせば (2.15) で左辺を $Y_m(u-i)Y_m(u+i)$ に置き換えた式に達する。

勿論これらの操作は文字通りには正当化されない。それはあくまで TBA 方程式が与えられた時、関連する差分方程式を抽出するための方便にすぎず、一般には TBA 方程式と上のような差分方程式は同等でない。[8] 便宜上 [KNS2] にならって (2.13) を Q-system、(2.8) を T-system、(2.15) を Y-system と呼ぼう。これらはいずれも ベーテ仮説に深い源を持つ差分方程式である。Q-system は通常の指標に関するある特定の形の恒等式、Y-system は TBA 方程式 の disguised form、 T-system は Q-system の Baxterization であって $T_{m+1}(u)T_{m-1}(u)/g_m(u)$ という組合せが Y-system を解くようなものである。

ここまでの話は 明らかに $A_1^{(1)}$ の場合であるが、実は一般の非ねじれ型アフィンリー環 $X_r^{(1)}$ に対してほぼ平行した話ができる。一般 $X_r^{(1)}$ 版の Q-system は [KR2, Ki]、 Y-system は [KN]、T-system は [KNS2] で得られた。[9] 3 章では Q-system の話を紹介し、T と Y は 4 章で扱うことにする。

[8] むしろ [KP] や [KNS3] では T_m (2.10) から出発して (2.15) を示し、その解析性を調べることにより上の議論をおよそ逆向きに辿って積分方程式を導いている。最近 TBA 方程式をこのように見直す運動がある。

[9] ねじれ型アフィンリー環 $A_n^{(2)}, D_n^{(2)}, E_6^{(2)}, D_4^{(3)}$ の場合の T-system については [KS2]。

3 Q-system

この章は [KR2] に基づく。この論文はとても mysterious である。主定理 (後出の 3.1) は著しい結果だが残念なことに証明が書いてない。[10] よくある話ではあるが。確かにベーテ仮説を表現論的な視点からあれこれひねくりまわすとそれらの定理を予想として発見することは難しくない。それはいわば "Bethe Ansatz folklore" とでも言うべきものである。ところが証明となるともっとずっと厳しい。[11]

$X_r = A_r\,(r \geq 1), B_r\,(r \geq 2), C_r\,(r \geq 2), D_r\,(r \geq 4), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ を古典単純リー環とする。Dynkin 図形 の頂点 $1 \leq a \leq r$ の番号付けは [Ka] の p53 (で ランク l を r にしたもの) に準拠する。α_a, Λ_a を単純ルート、基本ウエイトとし、前者は $\alpha =$ long root が $(\alpha|\alpha) = 2$ となるように規格化する。また

$$C_{ab} = \frac{2(\alpha_a|\alpha_b)}{(\alpha_a|\alpha_a)}, \qquad t_a = \frac{2}{(\alpha_a|\alpha_a)} \tag{3.1}$$

と定義する。$(C_{ab})_{1\leq a,b\leq r}$ はカルタン行列である。t_a は陽にあたえると

$$t_a = \begin{cases} 2 & (X_r, a) = (B_r, r), (C_r, 1 \leq a \leq r-1), (F_4, 3 \leq a \leq 4), \\ 3 & (X_r, a) = (G_2, 2), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

また Dynkin 図上の頂点 $1 \leq a, b \leq r$ について

$$a \sim b \ \leftrightarrow \ C_{ab} < 0 \tag{3.3}$$

と定義する。勿論 $a \sim b$ と $b \sim a$ は同値であり、両者が隣接している事をさす。

[KR2] では古典型 $X_r = A_r, B_r, C_r, D_r$ の場合に付随する Yangian $Y(X_r)$ のある特別な表現 $W^{(a)}_m (1 \leq a \leq r, m \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ から出発する。[12] $Y(X_r)$ は X_r 自身を部分代数として含むので、$W^{(a)}_m$ を X_r 加群とみるとそれは次のように分解するものである。[13]

$$A_r : W^{(a)}_m \simeq V(m\Lambda_a), \tag{3.4}$$

$$C_r : W^{(a)}_m \simeq \begin{cases} \oplus V(k_1\Lambda_1 + \cdots + k_a\Lambda_a) & 1 \leq a \leq r-1 \\ V(m\Lambda_r) & a = r \end{cases}, \tag{3.5}$$

[10] なぜか "This paper is devoted to the derivation and the proof of these formulas." とも書いてある。

[11] [KR2] の内容とはまた別の話ではあるが、この辺の気持をよく表現してる (?) と思われる言葉が文献 [RW] に見られる。その謝辞の前の二つの文を引用してみると、"Finally we should note that we have omitted all proofs not so much out of brevity but because of the absence of direct convincing proofs fot the non-specialist. The result presented resulted from the analysis of known examples i.e. the series $A^{(1)}_n$ [15] and $A^{(2)}_n, B^{(1)}_n, C^{(1)}_n, D^{(1)}_n, D^{(2)}_n$ [23] and moreover, from the persistent idea to find the Lie algebra structure everywhere."

[12] ここでの $W^{(a)}_m$ は [KR2] の $W^{(m)}_a$ に相当する。

[13] より正確には (4.15) 辺りを参照。

$$
\begin{aligned}
B_r, D_r : W_m^{(a)} &\simeq \oplus V(k_{a_0}\Lambda_{a_0} + k_{a_0+2}\Lambda_{a_0+2} + \cdots + k_a\Lambda_a) \quad 1 \le a \le r', \\
r' &= \begin{cases} r & \text{for } B_r \\ r-2 & \text{for } D_r \end{cases}, \quad a_0 \equiv a \bmod 2, \quad a_0 = 0 \text{ or } 1, \\
W_m^{(a)} &\simeq V(m\Lambda_a) \quad a = r-1, r \quad \text{ only for } D_r.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

ここで $V(\lambda)$ は最高ウエイト λ の 既約 X_r 加群であり、$\Lambda_0 = 0$ としている。(3.5) の和は 全ての $1 \le j \le a$ に対して $k_1 + \cdots + k_a \le m, k_j \equiv m\delta_{ja}$ mod 2 を満たす 非負整数 $k_1, \ldots, k_a$ にわたる。(3.6) の和は $t_a(k_{a_0} + k_{a_0+2} + \cdots + k_{a-2}) + k_a = m$ を満たす非負整数 $k_{a_0}, k_{a_0+2}, \ldots, k_a$ にわたる。(3.5) (resp. (3.6)) に登場する最高ウエイトをヤング図にすると、$a \times m$ の長方形から 1×2 (resp. 2×1) のドミノ を抜き去ってできるヤング図全体となっている。[14] この章では今後 $W_m^{(a)}$ を (3.4)–(3.6) で定義される (一般には可約な) X_r 加群と思って差し支えない。常に $W_m^{(a)} = V(m\Lambda_a) \oplus$ 低次の項、 という形をしている。

さてテンソル積の既約分解

$$
\bigotimes_{j=1}^{N} W_{m_j}^{(a_j)} = \bigoplus_{\lambda} Z\Big(\otimes_{j=1}^{N} W_{m_j}^{(a_j)}; \lambda\Big) V(\lambda) \tag{3.7}
$$

を考えよう。 Z は多重度をあらわす非負整数である。[15] λ の和は

$$
\lambda = \sum_{j=1}^{N} m_j \Lambda_{a_j} - \sum_{b=1}^{r} n_b \alpha_b, \qquad (n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{Z}_{\ge 0}) \tag{3.8}
$$

の形をした dominant integral weight 全体にわたる。

定理 3.1 ([KR2])

$$
Z\Big(\otimes_{j=1}^{N} W_{m_j}^{(a_j)}; \lambda\Big) = \sum_{\{M_i^{(b)}\}} \prod_{a=1}^{r} \prod_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} P_i^{(a)} + M_i^{(a)} \\ M_i^{(a)} \end{pmatrix}, \tag{3.9}
$$

$$
P_i^{(a)} = \sum_{j=1}^{N} \delta_{a a_j} min(i, m_j) - \sum_{b=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_a|\alpha_b) min(t_b i, t_a k) M_k^{(b)}, \tag{3.10}
$$

ここで *(3.9)* の和は λ によって *(3.8)* から 定まる n_b に対し、$n_b = \sum_{k=1}^{\infty} k M_k^{(b)}$ を満たす $\{M_i^{(b)} \in \mathbf{Z}_{\ge 0} \mid 1 \le b \le r, i \ge 1\}$ 全てにわたってとる。また二項係数 $\binom{m}{n}$ は $0 \le n \le m$ でない限り 0 と了解する。

[14] 長方形から 1×2 を抜いていくのは埋め込み $so(n) \hookrightarrow gl(n)$ による分解、2×1 を抜いていくのは $sp(n) \hookrightarrow gl(n)$ による分解でも起こることが知られているが、(3.5) と (3.6) では so と sp が逆転していることに注意。

[15] A_r 型で $\forall a_j = 1$ ないし $\forall m_j = 1$ の場合は Z は Kostka 数と呼ばれる。Kostka 数の q-analogue として Kostka-Foulkes 多項式 (cf. [Ma]) が有名だが、それに対しても 定理 3.1 にあるような公式が知られている。[KR1]

特にここで $N=1, a_1=a, m_1=m$ ととる事により (3.4)–(3.6) は次のようにも書けていることになる。

系 3.2

$$W^{(a)}_m = \bigoplus_\lambda Z\Big(W^{(a)}_m;\lambda\Big)V(\lambda). \tag{3.11}$$

[KR2] では 上の定理が “Theorem 1” として証明なしに与えられており、また “We mention that Theorem 1 remains valid also for exceptional Lie algebras” とも書いてある。[16] 実際このことは個々の例について多く検証されており、反例はみつかっていない。[Kl1] には、 E_6, E_7, E_8 の場合に $W^{(a)}_1$ の (3.11) による展開式が全ての a について載っている。一般の m の場合の部分的予想や F_4, G_2 等については [K1]。最近 [Kl2] も出た。

定理 3.1 はベーテ仮説に次のように由来する。まず $Y(X_r)$ 対称性を持つ可解頂点模型の転送行列で $\otimes_{j=1}^N W^{(a_j)}_{m_j}$ (= (3.7) の左辺) を quantum space に持つものを考える。その λ-sector[17] におけるスペクトルを記述するベーテ方程式[18] の根の個数が (3.7) の 分岐係数 Z に相当する。そこでベーテ方程式の根の個数をカウントするのであるが、これをストリング仮説という仮定を用いて計算すると (3.9)–(3.10) という表式が従う。

任意の $1 \le a \le r$, $m \in \mathbf{Z}_{\ge 1}$ と $\tilde{W} = \otimes_{j=1}^N W^{(a_j)}_{m_j}$ について

$$\begin{aligned} W &= W^{(a)}_m \otimes W^{(a)}_m \otimes \tilde{W}, \\ W' &= W^{(a)}_{m+1} \otimes W^{(a)}_{m-1} \otimes \tilde{W}, \\ W'' &= \otimes_{b\sim a} \otimes_{j=0}^{-C_{ab}-1} W^{(b)}_{[(C_{ba}m-j)/C_{ab}]} \otimes \tilde{W}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

とおく。ただしこの $[x]$ は x の整数部分である。[19]

定理 3.3 ([HKOTY]) 一般の X_r と λ *(3.8)* について

$$Z(W;\lambda) = Z(W';\lambda) + Z(W'';\lambda) \tag{3.13}$$

が成立する。

証明は (3.10) の $P^{(a)}_i$ を $P^{(a)}_i(\tilde{W}, \{M^{(b)}_k\})$ と書く時、$P^{(b)}_i(W, \{M^{(c)}_k\}) = P^{(b)}_i(W'', \{M^{(c)}_k - \delta_{ca}\delta_{km}\})$ という性質さえ示せば、後は二項係数の展開くらいの議論で片付く。さて $Q^{(a)}_m = chW^{(a)}_m$ を通常の (X_r の) 意味での指標としよう。($Q^{(a)}_0 = 1.$) (3.4) から $X_r = A_1$ の時は $Q^{(1)}_m$ を Q_m と書けば 2 章の記法と整合する。

[16] (3.8)–(3.10) は純粋に ルート系でデータだけで書けている事に注意して、例外型 $X_r = E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ の場合も Z をこの式で定義する。
[17] これは (2.4) における n の一般化。
[18] (7.1)–(7.3) 参照。
[19] 記号が (2.1) と重なるが混乱はないと思う。

系 3.4 ([KR2, Ki])

$$Q_m^{(a)^2} = Q_{m+1}^{(a)} Q_{m-1}^{(a)} + \prod_{b \sim a} \prod_{j=0}^{-C_{ab}-1} Q_{[(C_{ba}m-j)/C_{ab}]}^{(b)}. \tag{3.14}$$

[KR2] では $X_r = A_r, B_r, C_r, D_r$ の場合に上の式が与えられた。特に A 型に関して、証明は Littlewood-Richardson rule と長方形の ヤング図に対応する表現の陽な次元公式に基づく、とある。例外型も含んだ (3.14) は [Ki] に初めて現れた。(3.14) を各 X_r で具体的に書き下すと次のようになる。

$X_r = A_r, D_r, E_6, E_7, E_8$:

$$Q_m^{(a)^2} = Q_{m-1}^{(a)} Q_{m+1}^{(a)} + \prod_{b \sim a} Q_m^{(b)}. \tag{3.15}$$

$X_r = B_r$:

$$\begin{aligned}
Q_m^{(a)^2} &= Q_{m-1}^{(a)} Q_{m+1}^{(a)} + Q_m^{(a-1)} Q_m^{(a+1)} \quad (1 \le a \le r-2),\\
Q_m^{(r-1)^2} &= Q_{m-1}^{(r-1)} Q_{m+1}^{(r-1)} + Q_m^{(r-2)} Q_{2m}^{(r)},\\
Q_{2m}^{(r)^2} &= Q_{2m-1}^{(r)} Q_{2m+1}^{(r)} + Q_m^{(r-1)^2},\\
Q_{2m+1}^{(r)^2} &= Q_{2m}^{(r)} Q_{2m+2}^{(r)} + Q_m^{(r-1)} Q_{m+1}^{(r-1)}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$X_r = C_r$:

$$\begin{aligned}
Q_m^{(a)^2} &= Q_{m-1}^{(a)} Q_{m+1}^{(a)} + Q_m^{(a-1)} Q_m^{(a+1)} \quad (1 \le a \le r-2),\\
Q_{2m}^{(r-1)^2} &= Q_{2m-1}^{(r-1)} Q_{2m+1}^{(r-1)} + Q_{2m}^{(r-2)} Q_m^{(r)^2},\\
Q_{2m+1}^{(r-1)^2} &= Q_{2m}^{(r-1)} Q_{2m+2}^{(r-1)} + Q_{2m+1}^{(r-2)} Q_m^{(r)} Q_{m+1}^{(r)},\\
Q_m^{(r)^2} &= Q_{m-1}^{(r)} Q_{m+1}^{(r)} + Q_{2m}^{(r-1)}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$X_r = F_4$:

$$\begin{aligned}
Q_m^{(1)^2} &= Q_{m-1}^{(1)} Q_{m+1}^{(1)} + Q_m^{(2)},\\
Q_m^{(2)^2} &= Q_{m-1}^{(2)} Q_{m+1}^{(2)} + Q_m^{(1)} Q_{2m}^{(3)},\\
Q_{2m}^{(3)^2} &= Q_{2m-1}^{(3)} Q_{2m+1}^{(3)} + Q_m^{(2)^2} Q_{2m}^{(4)},\\
Q_{2m+1}^{(3)^2} &= Q_{2m}^{(3)} Q_{2m+2}^{(3)} + Q_m^{(2)} Q_{m+1}^{(2)} Q_{2m+1}^{(4)},\\
Q_m^{(4)^2} &= Q_{m-1}^{(4)} Q_{m+1}^{(4)} + Q_m^{(3)}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$X_r = G_2$:

$$Q_m^{(1)^2} = Q_{m-1}^{(1)} Q_{m+1}^{(1)} + Q_{3m}^{(2)},$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(2)^2}_{3m} &= Q^{(2)}_{3m-1}Q^{(2)}_{3m+1} + Q^{(1)^3}_{m},\\
Q^{(2)^2}_{3m+1} &= Q^{(2)}_{3m}Q^{(2)}_{3m+2} + Q^{(1)^2}_{m}Q^{(1)}_{m+1},\\
Q^{(2)^2}_{3m+2} &= Q^{(2)}_{3m+1}Q^{(2)}_{3m+3} + Q^{(1)}_{m}Q^{(1)^2}_{m+1}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$X_r = A_1$ では (2.13) に帰着する。一般に大きな表現を掛けあわせると沢山の既約成分の和に分解する、というのが通常の感覚である。ところが Yangian $Y(X_r)$ の $W^{(a)}_m$ という既約表現の family には、上のようにその仲だけで閉じる指標恒等式が存在している。しかも (3.14) のように全ての X_r に対してカルタン行列だけで書けてしまう形のものが。これは珍しい。[20]

(3.14) を $X^{(1)}_r$ 型の Q-system と呼ぼう。[21] それは ベーテ仮説に由来し、Dynkin 図ごとにその頂点 a と (非負) 整数 m を独立変数とする差分方程式である。次章ではそれが全て canonical に Baxterize される事をみる。その結果は X_r 型の 2 次元離散戸田場方程式の一種となる。

4 一般の $X^{(1)}_r$ に対する T-system と Y-system

各 X_r について、$1 \le a \le r,\ m \in \mathbf{Z}_{\ge 1},\ u \in \mathbf{C}$ に対し次の差分方程式を Y-system と呼ぼう。

$$
\begin{aligned}
&Y^{(a)}_m(u - \frac{1}{t_a})Y^{(a)}_m(u + \frac{1}{t_a})\\
&= \frac{\prod_{b\sim a}\prod_{j=C_{ba}+1}^{-C_{ba}-1}\prod_{k=0}^{-C_{ba}-1-|j|}\left(1 + Y^{(b)}_{\frac{t_b}{t_a}m+j}(u - \frac{C_{ba}+1+|j|+2k}{t_b})\right)}{(1+Y^{(a)}_{m-1}(u)^{-1})(1+Y^{(a)}_{m+1}(u)^{-1})}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

但し、右辺の分母で $Y^{(a)}_0(u)^{-1} = 0$、分子で $m \notin \mathbf{Z}$ の時 $Y^{(b)}_m = 0$ と了解する。(4.1) は [K1] における熱力学的 ベーテ仮説方程式から 2 章の後半に説明した手続きによって抽出された差分方程式であり、[KN] において一般の X_r に対して初めて導入された。[22] 各 X_r について Y-system を陽に書き下すと次のようになる。

$X_r = A_r, D_r, E_6, E_7, E_8$:

$$
Y^{(a)}_m(u-1)Y^{(a)}_m(u+1) = \frac{\prod_{b\sim a}(1+Y^{(b)}_m(u))}{(1+Y^{(a)}_{m-1}(u)^{-1})(1+Y^{(a)}_{m+1}(u)^{-1})}, \tag{4.2}
$$

[20] 指標 $Q^{(a)}_m$ は巾根等への特殊化に関しても著しい性質がある。詳しくは [KNS2]。またその応用としてビラソロ代数の中心の値に関する dilogarithm 恒等式 [Ki, KN] や $X^{(1)}_r$ の正整数レベルの最高ウエイト表現の指標公式に関する予想 [KNS1] などがある。

[21] Q-system の $Q^{(a)}_m$ という記号は [KR2] のオリジナルである。これを (2.4) の Q と混同されぬよう。こちらは有名な “Baxter の Q-関数” と呼ばれるものである。

[22] sl_2 の場合は別のルートから [KP] で得られていた。

$X_r = B_r :$

$$Y_m^{(a)}(u-1)Y_m^{(a)}(u+1) = \frac{(1+Y_m^{(a-1)}(u))(1+Y_m^{(a+1)}(u))}{(1+Y_{m-1}^{(a)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(a)}(u)^{-1})} \quad (1 \le a \le r-2),$$

$$Y_m^{(r-1)}(u-1)Y_m^{(r-1)}(u+1)$$
$$= \frac{(1+Y_m^{(r-2)}(u))(1+Y_{2m}^{(r)}(u+\frac{1}{2}))(1+Y_{2m}^{(r)}(u-\frac{1}{2}))(1+Y_{2m-1}^{(r)}(u))(1+Y_{2m+1}^{(r)}(u))}{(1+Y_{m-1}^{(r-1)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(r-1)}(u)^{-1})},$$

$$Y_{2m}^{(r)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m}^{(r)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{1+Y_m^{(r-1)}(u)}{(1+Y_{2m-1}^{(r)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+1}^{(r)}(u)^{-1})},$$

$$Y_{2m+1}^{(r)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m+1}^{(r)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1+Y_{2m}^{(r)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+2}^{(r)}(u)^{-1})}.$$

(4.3)

$X_r = C_r :$

$$Y_m^{(a)}(u-\frac{1}{2})Y_m^{(a)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{(1+Y_m^{(a-1)}(u))(1+Y_m^{(a+1)}(u))}{(1+Y_{m-1}^{(a)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(a)}(u)^{-1})} \quad (1 \le a \le r-2),$$

$$Y_{2m}^{(r-1)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m}^{(r-1)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{(1+Y_{2m}^{(r-2)}(u))(1+Y_m^{(r)}(u))}{(1+Y_{2m-1}^{(r-1)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+1}^{(r-1)}(u)^{-1})},$$

$$Y_{2m+1}^{(r-1)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m+1}^{(r-1)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{1+Y_{2m+1}^{(r-2)}(u)}{(1+Y_{2m}^{(r)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+2}^{(r)}(u)^{-1})},$$

$$Y_m^{(r)}(u-1)Y_m^{(r)}(u+1)$$
$$= \frac{(1+Y_{2m}^{(r-1)}(u+\frac{1}{2}))(1+Y_{2m}^{(r-1)}(u-\frac{1}{2}))(1+Y_{2m-1}^{(r-1)}(u))(1+Y_{2m+1}^{(r-1)}(u))}{(1+Y_{m-1}^{(r)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(r)}(u)^{-1})}.$$

(4.4)

$X_r = F_4 :$

$$Y_m^{(1)}(u-1)Y_m^{(1)}(u+1) = \frac{1+Y_m^{(2)}(u)}{(1+Y_{m-1}^{(1)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(1)}(u)^{-1})},$$

$$Y_m^{(2)}(u-1)Y_m^{(2)}(u+1)$$
$$= \frac{(1+Y_m^{(1)}(u))(1+Y_{2m}^{(3)}(u-\frac{1}{2}))(1+Y_{2m}^{(3)}(u+\frac{1}{2}))(1+Y_{2m-1}^{(3)}(u))(1+Y_{2m+1}^{(3)}(u))}{(1+Y_{m-1}^{(2)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(2)}(u)^{-1})},$$

$$Y_{2m}^{(3)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m}^{(3)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{(1+Y_m^{(2)}(u))(1+Y_{2m}^{(4)}(u))}{(1+Y_{2m-1}^{(3)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+1}^{(3)}(u)^{-1})},$$

$$Y_{2m+1}^{(3)}(u-\frac{1}{2})Y_{2m+1}^{(3)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{1+Y_{2m+1}^{(4)}(u)}{(1+Y_{2m}^{(3)}(u)^{-1})(1+Y_{2m+2}^{(3)}(u)^{-1})},$$

$$Y_m^{(4)}(u-\frac{1}{2})Y_m^{(4)}(u+\frac{1}{2}) = \frac{1+Y_m^{(3)}(u)}{(1+Y_{m-1}^{(4)}(u)^{-1})(1+Y_{m+1}^{(4)}(u)^{-1})}.$$

(4.5)

$X_r = G_2$:

$$
\begin{aligned}
&Y^{(1)}_m(u-1)Y^{(1)}_m(u+1)(1+Y^{(1)}_{m-1}(u)^{-1})(1+Y^{(1)}_{m+1}(u)^{-1})\\
&=(1+Y^{(2)}_{3m}(u-\frac{2}{3}))(1+Y^{(2)}_{3m}(u))(1+Y^{(2)}_{3m}(u+\frac{2}{3}))(1+Y^{(2)}_{3m-1}(u-\frac{1}{3}))(1+Y^{(2)}_{3m-1}(u+\frac{1}{3}))\\
&\times(1+Y^{(2)}_{3m+1}(u-\frac{1}{3}))(1+Y^{(2)}_{3m+1}(u+\frac{1}{3}))(1+Y^{(2)}_{3m-2}(u))(1+Y^{(2)}_{3m+2}(u)),\\
&Y^{(2)}_{3m}(u-\frac{1}{3})Y^{(2)}_{3m}(u+\frac{1}{3})=\frac{1+Y^{(1)}_m(u)}{(1+Y^{(2)}_{3m-1}(u)^{-1})(1+Y^{(2)}_{3m+1}(u)^{-1})},\\
&Y^{(2)}_{3m+1}(u-\frac{1}{3})Y^{(2)}_{3m+1}(u+\frac{1}{3})=\frac{1}{(1+Y^{(2)}_{3m}(u)^{-1})(1+Y^{(2)}_{3m+2}(u)^{-1})},\\
&Y^{(2)}_{3m+2}(u-\frac{1}{3})Y^{(2)}_{3m+2}(u+\frac{1}{3})=\frac{1}{(1+Y^{(2)}_{3m+1}(u)^{-1})(1+Y^{(2)}_{3m+3}(u)^{-1})}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

但し、(4.3) と (4.4) の最初の式において $a = 1$ とした場合には、右辺では $Y^{(0)}_m(u) = 0$ と了解する。

Q-system と Y-system が出そろった所で 2 章の終りに述べたような性質を持つ T-system を探す。即ち、Q-system に

$$
{Q^{(a)}_m}^2 = Q^{(a)}_{m+1}Q^{(a)}_{m-1} + Q^{(a')}_{m'}\cdots Q^{(a'')}_{m''}
$$

という式があったら、それを Baxterize した式

$$
T^{(a)}_m(u-\frac{1}{t_a})T^{(a)}_m(u+\frac{1}{t_a}) = T^{(a)}_{m+1}(u)T^{(a)}_{m-1}(u)+g^{(a)}_m(u)T^{(a')}_{m'}(u+x')\cdots T^{(a'')}_{m''}(u+x'')
$$

を考える。ここで $x', \dots, x''$ は未定定数で、それを

$$
g^{(a)}_m(u-\frac{1}{t_a})g^{(a)}_m(u+\frac{1}{t_a}) = g^{(a)}_{m-1}(u)g^{(a)}_{m+1}(u) \tag{4.7}
$$

の仮定のもとで

$$
Y^{(a)}_m(u) = \frac{T^{(a)}_m(u-\frac{1}{t_a})T^{(a)}_m(u+\frac{1}{t_a})}{T^{(a)}_{m-1}(u)T^{(a)}_{m+1}(u)} - 1 \tag{4.8}
$$

という combination が Y-system (4.1) を満たすように選べるか、と試みる。結果は

- 全ての X_r において可能。
- 各 X_r につき、自明な不定性を除くと unique。

この意味で Baxterization は canonical に遂行され、次のものが得られる。[KNS2]

$$
T^{(a)}_m(u-\frac{1}{t_a})T^{(a)}_m(u+\frac{1}{t_a}) = T^{(a)}_{m-1}(u)T^{(a)}_{m+1}(u)
$$

$$+g_m^{(a)}(u)\prod_{b\sim a}\prod_{j=C_{ab}+1}^{-C_{ab}-1}\prod_{k=0}^{-C_{ab}-1-|j|}T^{(b)}_{\frac{t_b}{t_a}(m+j)}\bigl(u-\frac{C_{ab}+1+|j|+2k}{t_a}\bigr). \tag{4.9}$$

但し、右辺において $n\notin\mathbf{Z}$ の場合は $T_n^{(b)}(u)=1$ と了解する。また (4.9) と (4.1) を見比べると C_{ab} と C_{ba} が現れているが、これは書き誤りではない。各 X_r について陽に書き下すと次のようになる。

$X_r=A_r,D_r,E_6,E_7,E_8$:

$$T_m^{(a)}(u-1)T_m^{(a)}(u+1)=T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u)+g_m^{(a)}(u)\prod_{b\sim a}T_m^{(b)}(u). \tag{4.10}$$

$X_r=B_r$:

$$\begin{aligned}
T_m^{(a)}(u-1)T_m^{(a)}(u+1)&=T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u)\\
&\quad+g_m^{(a)}(u)T_m^{(a-1)}(u)T_m^{(a+1)}(u)\qquad(1\le a\le r-2),\\
T_m^{(r-1)}(u-1)T_m^{(r-1)}(u+1)&=T_{m-1}^{(r-1)}(u)T_{m+1}^{(r-1)}(u)\\
&\quad+g_m^{(r-1)}(u)T_m^{(r-2)}(u)T_{2m}^{(r)}(u),\\
T_{2m}^{(r)}(u-\frac{1}{2})T_{2m}^{(r)}(u+\frac{1}{2})&=T_{2m-1}^{(r)}(u)T_{2m+1}^{(r)}(u)\\
&\quad+g_{2m}^{(r)}(u)T_m^{(r-1)}(u-\frac{1}{2})T_m^{(r-1)}(u+\frac{1}{2}),\\
T_{2m+1}^{(r)}(u-\frac{1}{2})T_{2m+1}^{(r)}(u+\frac{1}{2})&=T_{2m}^{(r)}(u)T_{2m+2}^{(r)}(u)\\
&\quad+g_{2m+1}^{(r)}(u)T_m^{(r-1)}(u)T_{m+1}^{(r-1)}(u).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$X_r=C_r$:

$$\begin{aligned}
T_m^{(a)}(u-\frac{1}{2})T_m^{(a)}(u+\frac{1}{2})&=T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u)\\
&\quad+g_m^{(a)}(u)T_m^{(a-1)}(u)T_m^{(a+1)}(u)\qquad(1\le a\le r-2),\\
T_{2m}^{(r-1)}(u-\frac{1}{2})T_{2m}^{(r-1)}(u+\frac{1}{2})&=T_{2m-1}^{(r-1)}(u)T_{2m+1}^{(r-1)}(u)\\
&\quad+g_{2m}^{(r-1)}(u)T_{2m}^{(r-2)}(u)T_m^{(r)}(u-\frac{1}{2})T_m^{(r)}(u+\frac{1}{2}),\\
T_{2m+1}^{(r-1)}(u-\frac{1}{2})T_{2m+1}^{(r-1)}(u+\frac{1}{2})&=T_{2m}^{(r-1)}(u)T_{2m+2}^{(r-1)}(u)\\
&\quad+g_{2m+1}^{(r-1)}(u)T_{2m+1}^{(r-2)}(u)T_m^{(r)}(u)T_{m+1}^{(r)}(u),\\
T_m^{(r)}(u-1)T_m^{(r)}(u+1)&=T_{m-1}^{(r)}(u)T_{m+1}^{(r)}(u)+g_m^{(r)}(u)T_{2m}^{(r-1)}(u).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$X_r=F_4$:

$$T_m^{(1)}(u-1)T_m^{(1)}(u+1)=T_{m-1}^{(1)}(u)T_{m+1}^{(1)}(u)+g_m^{(1)}(u)T_m^{(2)}(u),$$

$$
\begin{aligned}
T^{(2)}_m(u-1)T^{(2)}_m(u+1) &= T^{(2)}_{m-1}(u)T^{(2)}_{m+1}(u) + g^{(2)}_m(u)T^{(1)}_m(u)T^{(3)}_{2m}(u),\\
T^{(3)}_{2m}(u-\frac{1}{2})T^{(3)}_{2m}(u+\frac{1}{2}) &= T^{(3)}_{2m-1}(u)T^{(3)}_{2m+1}(u)\\
&\quad + g^{(3)}_{2m}(u)T^{(2)}_m(u-\frac{1}{2})T^{(2)}_m(u+\frac{1}{2})T^{(4)}_{2m}(u),\\
T^{(3)}_{2m+1}(u-\frac{1}{2})T^{(3)}_{2m+1}(u+\frac{1}{2}) &= T^{(3)}_{2m}(u)T^{(3)}_{2m+2}(u)\\
&\quad + g^{(3)}_{2m+1}(u)T^{(2)}_m(u)T^{(2)}_{m+1}(u)T^{(4)}_{2m+1}(u),\\
T^{(4)}_m(u-\frac{1}{2})T^{(4)}_m(u+\frac{1}{2}) &= T^{(4)}_{m-1}(u)T^{(4)}_{m+1}(u) + g^{(4)}_m(u)T^{(3)}_m(u).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$X_r = G_2$:

$$
\begin{aligned}
T^{(1)}_m(u-1)T^{(1)}_m(u+1) &= T^{(1)}_{m-1}(u)T^{(1)}_{m+1}(u) + g^{(1)}_m(u)T^{(2)}_{3m}(u),\\
T^{(2)}_{3m}(u-\frac{1}{3})T^{(2)}_{3m}(u+\frac{1}{3}) &= T^{(2)}_{3m-1}(u)T^{(2)}_{3m+1}(u)\\
&\quad + g^{(2)}_{3m}(u)T^{(1)}_m(u-\frac{2}{3})T^{(1)}_m(u)T^{(1)}_m(u+\frac{2}{3}),\\
T^{(2)}_{3m+1}(u-\frac{1}{3})T^{(2)}_{3m+1}(u+\frac{1}{3}) &= T^{(2)}_{3m}(u)T^{(2)}_{3m+2}(u)\\
&\quad + g^{(2)}_{3m+1}(u)T^{(1)}_m(u-\frac{1}{3})T^{(1)}_m(u+\frac{1}{3})T^{(1)}_{m+1}(u),\\
T^{(2)}_{3m+2}(u-\frac{1}{3})T^{(2)}_{3m+2}(u+\frac{1}{3}) &= T^{(2)}_{3m+1}(u)T^{(2)}_{3m+3}(u)\\
&\quad + g^{(2)}_{3m+2}(u)T^{(1)}_m(u)T^{(1)}_{m+1}(u-\frac{1}{3})T^{(1)}_{m+1}(u+\frac{1}{3}).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$X_r = A_1$ では (2.8) に帰着する。$g^{(a)}_m(u)$ を模型の規格化に適合してとると、T-system は A_1 以外の場合でも、それまでに散在的に知られていた実際の転送行列の関数方程式を再現する。

一般に Yangian の表現はスペクトルパラメタを運んでおり、$W^{(a)}_m(u)$ という family を考える事ができる。これは 次のような Drinfel'd 多項式 $\{P_a(v) \mid 1 \le a \le r\}$ [D] によって特徴付けられる。[23]

$$
P_b(v) = \begin{cases} (v-u+\frac{m-1}{t_a})(v-u+\frac{m-3}{t_a})\cdots(v-u-\frac{m-1}{t_a}) & \text{for } b=a \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.
\tag{4.15}
$$

$Y(X_r)$ 対称性を持つ可解頂点模型において、$W^{(a)}_m(u)$ を auxiliary space に持つ転送行列 $T^{(a)}_m(u)$ を考えると、それはモノドロミー行列の $W^{(a)}_m(u)$ にわたるトレースである。この意味でも $T^{(a)}_m(u)$ は 指標 $Q^{(a)}_m$ の Baxterization と呼ぶにふさわしい。その $T^{(a)}_m(u)$ が T-system (指標恒等式の Baxterization)

[23] オリジナルな [D] での定義と照合する際は、ここと 7 章の v は規格化 を modulo として考えられたし (恐縮)。この Drinfel'd 多項式の零点のパターンは TBA のストリング仮説において、"color a の m-string" として頻出する。

に従うだろう[24] 、または、(4.9) の三項に相当する W の三種類のテンソル積の間に短完全列があるだろう、というのが現時点での『仮説』である。

T-system は差分方程式としては、スペクトルパラメタ u と m を形式的に離散的時空変数とみなし、 $g_m^{(a)}(u)$ も適当に規格化すると X_r 型離散戸田場 (戸田分子) 方程式

$$(\partial_u^2 - \partial_m^2) \log \phi_a(u,m) = \mathrm{const} \prod_{b=1}^{r} \phi_b(u,m)^{-C_{ab}} \tag{4.16}$$

になる。但し、$T_m^{(a)}(u)$ の『スケール極限』を $\phi_a(u,m)$ と書いた。[25] そうすると先にのべた事を 荒っぽく標語にすると、

$$X_r \text{ 型離散戸田場方程式} \quad \subset \quad Y(X_r) \text{ の有限次元表現環} \tag{4.17}$$

となる。

問 4.1 *T-system のラックス表示はあるか。*[26]

5 古典型の場合の T-sytem の解、その 1： Quantum Jacobi-Trudi Formula

転送行列 $T_0^{(a)}(u)$ はスカラー行列である。T-system (4.9) と $g_m^{(a)}(u)$ の選び方により $\{T_m^{(a)}(u)\}$ 全体の (あるいは格子模型の) 規格化が定まる。この章では簡単のため $\forall T_0^{(a)}(u) = \forall g_m^{(a)}(u) = 1$ として話を進める。この $g_m^{(a)}(u)$ は自明に (4.7) を満たす。一般の $T_0^{(a)}(u)$ と (4.7) を満たす 任意の $g_m^{(a)}(u)$ に関して話を再構成するのは易しい。

一般の X_r についてその T-system は、 m の小さい式から順次使うことにより $T_m^{(a)}(u)$ を $\{T_1^{(1)}(u+\cdots),\ldots,T_1^{(r)}(u+\cdots)\}$ を用いて表すことが出来る。ここで $+\cdots$ と書いたのは適当な定数シフトである。例えば A_r 型の場合これを実行すると、

$$T_2^{(1)}(u) = T_1^{(1)}(u-1)T_1^{(1)}(u+1) - T_1^{(2)}(u) = det\begin{pmatrix} T_1^{(1)}(u-1) & T_1^{(2)}(u) \\ 1 & T_1^{(1)}(u+1) \end{pmatrix},$$

$$T_2^{(2)}(u) = T_1^{(2)}(u-1)T_1^{(2)}(u+1) - T_1^{(1)}(u)T_1^{(3)}(u) = det\begin{pmatrix} T_1^{(2)}(u-1) & T_1^{(3)}(u) \\ T_1^{(1)}(u) & T_1^{(2)}(u+1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} T_3^{(1)}(u) &= \frac{T_2^{(1)}(u-1)T_2^{(1)}(u+1) - T_2^{(2)}(u)}{T_1^{(1)}(u)} \\ &= T_1^{(1)}(u-2)T_1^{(1)}(u)T_1^{(1)}(u+2) - T_1^{(1)}(u+2)T_1^{(2)}(u-1) \end{aligned}$$

[24] これは A_r 型では正しい。
[25] A_r 型 の T-system (Hirota-Miwa 方程式とも呼ばれる) については [KLWZ]、連続の戸田場方程式については [LS] も参照のこと。
[26] A_r 型の時は [KLWZ] や [HTI] を参照。

$$
\begin{aligned}
&- T_1^{(1)}(u-2)T_1^{(2)}(u+1) + T_1^{(3)}(u) \\
&= det \begin{pmatrix} T_1^{(1)}(u-2) & T_1^{(2)}(u-1) & T_1^{(3)}(u) \\ 1 & T_1^{(1)}(u) & T_1^{(2)}(u+1) \\ 0 & 1 & T_1^{(1)}(u+2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

これを一般化して次の結果を示すのは簡単である。

命題 5.1 $1 \le a \le r, m \in \mathbf{Z}_{\ge 1}$ に対して

$$T_m^{(a)}(u) = det_{1 \le i,j \le m} \left(T_1^{(a-i+j)}(u+i+j-m-1) \right). \tag{5.1}$$

但し、$T_1^{(0)}(u) = 1, T_1^{(b)}(u) = 0\,(b < 0 \;\; or \; b > r)$.

証明は行列式に関する Jacobi の恒等式

$$D\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} D\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = DD\begin{bmatrix}1,n\\1,n\end{bmatrix} + D\begin{bmatrix}1\\n\end{bmatrix} D\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

を適応すればよい。ここで D は任意の n 次正方行列の行列式であり、$D\left[\begin{smallmatrix} i_i,i_2,\ldots \\ j_1,j_2,\ldots \end{smallmatrix}\right]$ はそれから i_k 行と j_k 列を除いた小行列式である。

実は 6 章で、より一般に skew Young 図形 λ/μ でパラメトライズ される $T_{\lambda/\mu}(u)$ が導入されるが、それに対して

$$T_{\lambda/\mu}(u) = det_{1 \le i,j \le \lambda_1} \left(T_1^{(\lambda'_i - \mu'_j - i + j)}(u + \lambda'_1 - \lambda_1 - \lambda'_i - \mu'_j + i + j - 1) \right) \tag{5.3}$$

が成立する。これは $T_{(m^a)/\emptyset}(u)$ という特殊な場合として $T_m^{(a)}(u)$ を含む。また更に 6 章で議論されるように、$u \to \infty$ とすると適当な規格化のもとに $T_{\lambda/\mu}(u)$ は自然に skew Schur 関数 $s_{\lambda/\mu}$ と見なせる。[27] 従って $T_1^{(a)}(u) = T_{(1^a)}(u)$ に注意すると (5.3) の $u \to \infty$ 極限は (2.14) の A_r 版にあたる Jacobi-Trudi 公式 [Ma]

$$s_{\lambda/\mu} = det_{1 \le i,j \le \lambda_1} \left(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j} \right) \tag{5.4}$$

に帰着する。ここで $e_a = s_{(1^a)}$ は elementary symmetric function [Ma] である。[28]

(5.3) は λ/μ が通常の ヤング図の場合 (即ち $\mu = \emptyset$ の場合) に [BR] に初登場した。(但し、 sl_2 に限ればもうすこしさかのぼる。) そこでは $T_\lambda(u)$ は λ 型に fusion した RSOS (Restricted Solid-On-Solid) 模型 [JKMO] の転送行列であった。skew Young 図形 の場合については [Ch, NT, K2] も参照されたい。

以下では A_r 型以外の古典型 $X_r = B_r, C_r, D_r$ の場合について、同様の解 $T_m^{(a)}(u)$ を与える。それらは quantum Jacobi-Trudi 公式 の $Y(X_r)$ 版であ

[27] rational の場合でも通用する言い方をするには、本当は極限というよりも symbolic に u-依存性を落せると言った方が適切。(6.3)–(6.4) 辺りを参照。

[28] (5.3) と (5.4) 供に $T_m^{(1)} = T_{(m)}$ や completely symmetric function $h_m = s_{(m)}$ を行列要素にもつ version もある。

る。$(X_r, a) = (C_r, r), (D_r, r-1), (D_r, r)$ 以外の場合は全て determinant であり、 [KNS2] で予想された。証明は、上記の場合は実は pfaffian であったという報告と共に [KNH] で与えられた。それはほぼ全て (5.2) により片付く。[29]

今後この章では任意の $k \in \mathbf{C}$ に対して

$$x^a_k = \begin{cases} T^{(a)}_1(u+k) & 1 \le a \le r, \\ 1 & a = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

と置く。

B_r **の場合**:

まず無限次元の行列 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}}$ と $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{cases} x^{\frac{j-i}{2}+1}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} \in \{1, 0, \ldots, 2-r\}, \\ -x^{\frac{i-j}{2}+2r-2}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} \in \{1-r, -r, \ldots, 2-2r\}, \\ -x^r_{r+i-\frac{5}{2}} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z} \text{ and } j = i+2r-3, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & \text{if } i = j-1 \pm 1 \text{ and } i \in 2\mathbf{Z}, \\ x^r_{i-1} & \text{if } i = j-1 \text{ and } i \in 2\mathbf{Z}+1, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

例えば B_3 では

$$(\mathcal{T}_{ij})_{i,j \ge 1} = \begin{pmatrix} x^1_0 & 0 & x^2_1 & 0 & -x^2_2 & 0 & -x^1_3 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^3_{5/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & x^1_2 & 0 & x^2_3 & 0 & -x^2_4 & 0 & -x^1_5 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^3_{9/2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x^1_4 & 0 & x^2_5 & 0 & -x^2_6 & \\ & & & & \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$(\mathcal{E}_{ij})_{i,j \ge 1} = \begin{pmatrix} 0 & x^3_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & x^3_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3_4 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

この例から明かなように、任意の $1 \le a \le r$ と k について $\pm x^a_k$ は適当にシフトされた行列 $\mathcal{T}|_{u \to u+\xi}$ に丁度一度だけ行列要素として現れる。ここで

[29] A_r の場合、[KLWZ] に 命題 5.1 とは別の解が議論されている。 それは常にサイズ $r+1$ の行列式であらわされ、連続の時の [LS] に似ている。

$u \to u+\xi$ は (5.5) と整合するよう 下着き添字を一斉に ξ だけずらしたものを表す。例えば 行列 $\mathcal{T}|_{u\to u+\xi}$ においては x^1_1 を (1,1) 成分として持たせるにはシフト $\xi=1$ が必要である。この様な事情を考慮して $\mathcal{T}_m(i,j,\pm x^a_k)$ という記法を用いることにする。これは行列 $\mathcal{T}|_{u\to u+\xi}$ から切り出された m 行 m 列の 部分行列であって、その (i,j) 成分が丁度 $\pm x^a_k$ となるものを示す。例えば (5.6) から

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3(1,1,x^1_0) &= \begin{pmatrix} x^1_0 & 0 & x^2_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x^1_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_3(1,1,x^1_1)= \begin{pmatrix} x^1_1 & 0 & x^2_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x^1_3 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}_2(1,2,-x^3_{5/2}) &= \begin{pmatrix} 0 & -x^3_{5/2} \\ 0 & x^2_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2(1,2,-x^3_2)= \begin{pmatrix} 0 & -x^3_2 \\ 0 & x^2_{5/2} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.8}$$

といった具合である。記法 $\mathcal{E}_m(i,j,\pm x^r_k)$ も同様とする。これらの約束のもとに B_r 型の T-system の解は次のような表示を持つ。

命題 5.2 ([KNH]) 任意の $m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ について

$$\begin{aligned}T^{(a)}_m(u) &= det\bigl(\mathcal{T}_{2m-1}(1,1,x^a_{-m+1}) + \mathcal{E}_{2m-1}(1,2,x^r_{-m+r-a+\frac{1}{2}})\bigr),\ 1 \leq a < r, \\ T^{(r)}_m(u) &= (-1)^{m(m-1)/2} det\bigl(\mathcal{T}_m(1,2,-x^{r-1}_{-\frac{m}{2}+1}) + \mathcal{E}_m(1,1,x^r_{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}})\bigr).\end{aligned}$$

C_r の場合

ここでは無限次元の行列 $\mathcal{T}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{cases} x^{j-i+1}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i-j \in \{1,0,\ldots,1-r\}, \\ -x^{i-j+2r+1}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i-j \in \{-1-r,-2-r,\ldots,-1-2r\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.9}$$

例えば C_2 では

$$(\mathcal{T}_{ij})_{i,j\geq 1} = \begin{pmatrix} x^1_0 & x^2_{1/2} & 0 & -x^2_{3/2} & -x^1_2 & -1 & 0 & 0 & \\ 1 & x^1_1 & x^2_{3/2} & 0 & -x^2_{5/2} & -x^1_3 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & x^1_2 & x^2_{5/2} & 0 & -x^2_{7/2} & -x^1_4 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & x^1_3 & x^2_{7/2} & 0 & -x^2_{9/2} & -x^1_5 & \\ & & & & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

任意の m (と k) について 行列 $\mathcal{T}_m(1,2,-x^r_k)$ は反対称行列であることに注意しよう。C_r 型の T-system の解は次のような表示を持つ。

命題 5.3 ([KNH]) 任意の $m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ について

$$\begin{aligned}T^{(a)}_m(u) &= det\bigl(\mathcal{T}_m(1,1,x^a_{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}})\bigr) \quad 1 \leq a < r, \\ T^{(r)}_m(u) &= (-1)^m pf\bigl(\mathcal{T}_{2m}(1,2,-x^r_{-m+1})\bigr).\end{aligned}$$

ここで pf は Pfaffian である。実は T 達の積にたいして次のような関係式も成立する。

$$T_m^{(r)}(u-\frac{1}{2})T_m^{(r)}(u+\frac{1}{2}) = det\big(\mathcal{T}_{2m}(1,1,x^r_{-m+\frac{1}{2}})\big),$$
$$T_m^{(r)}(u)T_{m+1}^{(r)}(u) = det\big(\mathcal{T}_{2m+1}(1,1,x^r_{-m})\big).$$

D_r **の場合**:

今度は無限次元行列 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{E}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{cases} x^{\frac{j-i}{2}+1}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} \in \{1,0,\ldots,3-r\}, \\ -x^{r-1}_{\frac{i+j-1}{2}} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} = \frac{5}{2}-r, \\ -x^{r}_{\frac{i+j-3}{2}} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} = \frac{3}{2}-r, \\ -x^{\frac{i-j}{2}+2r-3}_{\frac{i+j}{2}-1} & \text{if } i \in 2\mathbf{Z}+1 \text{ and } \frac{i-j}{2} \in \{1-r,-r,\ldots,3-2r\}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & \text{if } i = j-2\pm 2 \text{ and } i \in 2\mathbf{Z}, \\ x^{r-1}_i & \text{if } i = j-3 \text{ and } i \in 2\mathbf{Z}, \\ x^r_{i-2} & \text{if } i = j-1 \text{ and } i \in 2\mathbf{Z}, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

例えば D_4 では

$$(\mathcal{T}_{ij})_{i,j\ge 1} = \begin{pmatrix} x^1_0 & 0 & x^2_1 & -x^3_2 & 0 & -x^4_2 & -x^2_3 & 0 & -x^1_4 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & x^1_2 & 0 & x^2_3 & -x^3_4 & 0 & -x^4_4 & -x^2_5 & 0 & -x^1_6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$$(\mathcal{E}_{ij})_{i,j\ge 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & x^4_0 & 0 & x^3_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x^4_2 & 0 & x^3_4 & -1 & 0 & \\ & & & & & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

B_r 型の時と同様の $\mathcal{T}_m(i,j,\pm x^a_k)$ $(1 \le a \le r-2)$ とか $\mathcal{T}_m(i,j,-x^a_k), \mathcal{E}_m(i,j,x^a_k)$ $(a = r-1, r)$ 等という記法を用いると、D_r 型 T-system の解に次のような表示を与えられる。

命題 5.4 ([KNH]) 任意の $m \in \mathbf{Z}_{\ge 1}$ について

$$T_m^{(a)}(u) = det\big(\mathcal{T}_{2m-1}(1,1,x^a_{-m+1}) + \mathcal{E}_{2m-1}(2,3,x^r_{-m-r+a+4})\big),\ 1 \le a \le r-2,$$
$$T_m^{(r-1)}(u) = pf\big(\mathcal{T}_{2m}(2,1,-x^{r-1}_{-m+1}) + \mathcal{E}_{2m}(1,2,x^{r-1}_{-m+1})\big),$$
$$T_m^{(r)}(u) = (-1)^m pf\big(\mathcal{T}_{2m}(1,2,-x^r_{-m+1}) + \mathcal{E}_{2m}(2,1,x^r_{-m+1})\big).$$

ここで Pfaffian のとられている行列は全て反対称行列になっている。証明には、この他に次のような関係式も用いられる。

$$
\begin{aligned}
T^{(r-1)}_m(u)T^{(r)}_m(u) &= (-1)^m det\big(\mathcal{T}_{2m}(1,1,-x^{r-1}_{-m+1})+\mathcal{E}_{2m}(2,2,x^{r}_{-m+1})\big),\\
T^{(r-1)}_m(u+1)T^{(r)}_m(u-1) &= (-1)^m det\big(\mathcal{T}_{2m}(1,1,-x^{r}_{-m})+\mathcal{E}_{2m}(2,2,x^{r-1}_{-m+2})\big),\\
T^{(r-1)}_{m+1}(u)T^{(r)}_m(u-1) &= (-1)^{m+1} det\big(\mathcal{T}_{2m+1}(1,1,-x^{r-1}_{-m})+\mathcal{E}_{2m+1}(2,2,x^{r}_{-m})\big),\\
T^{(r-1)}_m(u+1)T^{(r)}_{m+1}(u) &= (-1)^m det\big(\mathcal{T}_{2m+1}(2,1,x^{r-2}_{-m+1})+\mathcal{E}_{2m+1}(1,1,x^{r}_{-m})\big).
\end{aligned}
$$

注意 5.5 B_r と D_r の場合、行列要素に スピン表現に関係した $T^{(a)}_1$ の二次式まで許すと、$\mathcal{T},\mathcal{E}$ のように『疎』ではなく『密』な行列を用いた表示も作れる。*[KOS, TK]*

6 古典型の場合の T-sytem の解、その 2: Tableaux-Sum

sl_2 の場合、 T-system (2.8) の解として DVF を (2.11)–(2.12) のように tableaux-sum として構成できた。これは他の X_r の $T^{(a)}_m(u)$ にどれくらい一般化され得るだろうか。勿論こういう問題は X_r の型や表現に sensitive な話であり、A 型以外の古典型ではちょっと複雑、古典型からはずれると一般には超複雑という事情は Yangian $Y(X_r)$ でも X_r と一緒である。現在のところ $T^{(a)}_m(u)$ を特殊な場合として含むより広い『skew Young 図的な family』に関しては A_r 型[30] [BR, K2] と B_r 型 [KOS] で概ね片付いている。

簡単のため前者を簡略して紹介しよう。A_1 の際の (2.11) の拡張として $1 \le a \le r+1$ に対し、u の関数 $\boxed{a}$ が ランク個の Q-関数 $Q_a(u)\,(1 \le a \le r)$ の比を用いて定義され、skew Young 図 λ/μ でラベルされる DVF が

$$
T_{\lambda/\mu}(u) = \sum_{\tau \in SST(\lambda/\mu)} \prod_{i \in \tau} \boxed{\tau_i} \tag{6.1}
$$

のように構成される。ここで SST は skew Young 図 λ/μ 上の文字 $\{1,\ldots,r+1\}$ からなる semi-standard tableaux の集合。$\boxed{\tau_i}$ のスペクトルパラメタ u は tableau 上の位置 i が右に (下に) 進むごとに 2 増やす (減らす)。τ_i の意味は明らかだろう。(6.1) を用いて $T^{(a)}_m(u) = T_{(m^a)/\emptyset}(u)$ とおくとこれは A_r 型 T-system の解になる。更に quantum Jacobi-Trudi 公式 (5.3) が成立する。Q-関数は (2.4) と同様にベーテ方程式の根を零点とするよう定義される。DVF $T^{(a)}_1(u)$ がベーテ方程式のもとに pole-free である事をチェックするのは易しい。すると (5.3) から $T_{\lambda/\mu}(u)$ 一般についてもそう言える。これらの様相は 2 章で見た A_1 の場合を全く同じである。

[30] tame module と呼ばれている。[NT]

B_r 型でも $T_1^{(r)}(u)$ に相当するスピン表現用の tableaux が入り混ざって来るが、これを手懐ける事により、 skew Young 図でラベルされ $T_m^{(a)}(u)$ をカバーする DVF の family を semi-standard もどきの tableau-sum として構成できる。

5 章で見たように、任意の $T_m^{(a)}$ は T-system により $T_1^{(1)}, \ldots, T_1^{(r)}$ で表される。従って、これらについて DVF を構成する事は基本的な問題である。[31] これは古典型および E_6, F_4, G_2 の $a = 1$ の場合に [R2] で実行された。古典型の基本表現全体は [KS1] で扱われた。そこでは、overall の規格化を modulo として

$$T_1^{(a)'}(u) = \frac{Q_a(u - \frac{1}{t_a})}{Q_a(u + \frac{1}{t_a})} + \cdots \tag{6.2}$$

という形の $\dim W_1^{(a)}$ からなる DVF が得られている。ここで、$+\cdots$ の各項は

$$\prod_{a=1}^{r} \frac{P_a(u + x_1) \cdots P_a(u + x_{i_a})}{P_a(u + x'_1) \cdots P_a(u + x'_{i_a})} \frac{Q_a(u + y_1) \cdots Q_a(u + y_{j_a})}{Q_a(u + y'_1) \cdots Q_a(u + y'_{j_a})} \tag{6.3}$$

という形をしている。ここで $x_k, x'_k, y_k, y'_k, i_a, j_a$ は定数である。$Q_a(u), P_a(u)$ の定義は (7.2)、(7.3) を見よ。(6.2) は、全体に適当な因子 $\prod_a P_a(u + \cdots)$ をかけて分母の P_a-関数をはらうと、ベーテ方程式 (7.1) のもとに pole-free になる。また、 summand (6.3) に対して

$$wt = \sum_{a=1}^{r} \frac{t_a}{2} \Big(\sum_{k=1}^{j_a} (y'_k - y_k) \Big) \Lambda_a \tag{6.4}$$

とおき、 (6.2) に対応する和 $\sum e^{wt}$ を考えると $Q_1^{(a)} = chW_1^{(a)}$ と一致する。[32] 特に (6.2) の項は最高ウエイト $wt = \Lambda_a$ に対応するので top term と呼ぼう。

7 議論

$T_m^{(a)}(u)$ の auxiliary space $W_m^{(a)}(u)$ はその Drinfel'd 多項式が (4.15) という特別な形をしている既約表現である。これまで繰り返し述べてきたように、転送行列の DVF は auxiliary space の (Baxterize された) 指標であるという描像をもっと徹底させるなら、$T_m^{(a)}(u)$ に限らず Yangian $Y(X_r)$ の任意の既約表現を auxiliary space に持つ転送行列の DVF を構成しようというのは自然な動機だろう。その際の指導原理は何か。単純リー環 X_r なら有限次元既

[31] 対応する表現 $W_1^{(1)}, \ldots, W_1^{(r)}$ は Yangian の基本表現と呼ばれている。cf. [CP3]。

[32] 例えば $E_8, a = 1$ の時、$W_1^{(1)} \simeq V_{adj} \oplus V(0)$ に対応して丁度 249 項で pole-free に閉じる DVF がある。[KS1]

約表現を指定するには最高ウエイトを与えればよい。後はワイル群対称性が指標を生成してくれる。Yangian $Y(X_r)$ の場合は有限次元既約表現を指定するには Drinfel'd 多項式を与えればよい。その後 DVF をどうやって構成してゆくか? そのエレガントな答えは将来の理論に譲り、ここでは解析的ベーテ仮説のアイデアを借りてみる。即ちベーテ方程式のもとでの全ての pole のキャンセルである。経験的にはこの要請は DVF を確定するに十分らしい。

今 $W(i)(0 \le i \le N)$ を Drinfel'd 多項式 $\{P_1^{(i)}(v), \ldots, P_r^{(i)}(v)\}$ で特徴付けられる $Y(X_r)$ の有限次元既約表現としよう。$Y(X_r)$ の普遍 R 行列の像から生じる可解頂点模型の転送行列で $W(1) \otimes \cdots \otimes W(N)$ を quantum space に、 $W(0)$ を auxiliary space に持つもの $T_{W(0)}$ を考える。

(3.8) と同様に、 λ を $\sum_{j=1}^N (W(j)$ の X_r 加群としての最高ウエイト$) - \sum_{a=1}^r n_a \alpha_a = \lambda$, $(n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{Z}_{\ge 0})$ という形の dominant integral weight とする。すると $T_{W(0)}$ の λ-sector におけるスペクトルを記述するベーテ方程式 (BAE) は経験的に

$$-\frac{P_a(v_k^{(a)} + \frac{1}{t_a})}{P_a(v_k^{(a)} - \frac{1}{t_a})} = \prod_{b=1}^r \frac{Q_b(v_k^{(a)} + (\alpha_a|\alpha_b))}{Q_b(v_k^{(a)} - (\alpha_a|\alpha_b))}, \tag{7.1}$$

$$Q_a(v) = \prod_{j=1}^{n_a} (v - v_j^{(a)}), \tag{7.2}$$

$$P_a(v) = \prod_{i=1}^N P_a^{(i)}(v) \tag{7.3}$$

であると考えられている。[33] ただし (7.1) は $1 \le a \le r$, $1 \le k \le n_a$ 全てについて連立の条件である。さて auxiliary space $W(0)$ の Drinfel'd 多項式は一般的に

$$P_a^{(0)}(v) = \prod_{j=1}^{K_a} (v - u - z_j^{(a)}) \qquad 1 \le a \le r \tag{7.4}$$

であるとしよう。ここで $K_a \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$ と $z_j^{(a)} \in \mathbf{C}$ は任意である。$T_1^{(a)\prime}(u)$ を 6 章最後に述べた DVF とする。以下では一般の X_r と $1 \le a \le r$ について $T_1^{(a)\prime}(u)$ が存在すると仮定して話を進める。またいちいち断らないが、『BAE (7.1) のもとに pole-free』という時は常に overall に P_a-関数の分母をはらえば、という前提付きと了解する。この時 (7.4) に応じて $\prod_{a=1}^r \prod_{j=1}^{K_a} T_1^{(a)\prime}(u + z_j^{(a)})$ という積を考える。$T_1^{(a)\prime}(u)$ の性質からこれは BAE (7.1) のもとに pole-free である。(6.2) を代入して展開すれば、 それは (6.3) のような summand を $\prod_{a=1} (\dim W_1^{(a)})^{K_a}$ 個含む DVF である。大事なことは、その pole-freeness は $\{z_j^{(a)}\}$ が general position でない時にはより細かく成立しうることであ

[33] 右辺は [OW, RW]、左辺は [KOS] による。後者は Sklyanin と Tarasov 両氏もそう思うと言っていた。(7.1) の一般的な導出を見たことは無いが、きっとそれをご存知の方がいるのではないかと思っている。

る。[34] そこで一般に

$$\prod_{a=1}^{r}\prod_{j=1}^{K_a} T_1^{(a)\prime}(u+z_j^{(a)}) = T'_{W(0)} + T'', \tag{7.5}$$

$$T'_{W(0)} = \prod_{a=1}^{r}\prod_{j=1}^{K_a} \frac{Q_a(u+z_j^{(a)}-\frac{1}{t_a})}{Q_a(u+z_j^{(a)}+\frac{1}{t_a})} + \cdots \tag{7.6}$$

のように分解して考える。ここで $T'_{W(0)}$ は (6.2) の top term の積を含み、BAE のもとで pole-free になる “minimal な DVF” である。[35] この時、『$T'_{W(0)}$ は Drinfel'd 多項式 (7.4) で決まる $W(0)$ を auxiliary space とする転送行列 $T_{W(0)}$ の DVF を up to overall で与える』というのが予想である。(6.3)–(6.4) の規則により対応する $\sum e^{wt}$ を考えれば $W(0)$ を X_r 加群と見た際の指標の予想にもなる。

注意 7.1 *skew Young* 図でラベルされる *DVF (5.3) (= (6.1))* の各項に *(6.3)–(6.4)* のように wt を割り当てることができるが、そのなかで最高ウエイトを与える項は *(7.6)* の形にフィットする事が出来る。そうして決まる $z_j^{(a)}, K_a$ を *(7.4)* に代入したもの *[K2]* は、規約の調整のもとに *[NT]* の *Drinfel'd* 多項式と一致する。

最後に (7.4) という一般的状況から再び T-system に関連する (4.15) の場合を振り返ってみる。 上に述べた予想が正しいと仮定しよう。すると (7.4)、(7.6) を (4.15) に適用することにより、$T_m^{(a)}(u) \propto T'_{W_m^{(a)}(u)}$ に対して overall を modulo として

$$T_m^{(a)}(u) = \frac{Q_a(u-\frac{m}{t_a})}{Q_a(u+\frac{m}{t_a})} + \cdots \tag{7.7}$$

という top term を持つ minimal な DVF という表示が確定する。この DVF が T-system を満たすかという問が生じる。それは (4.15) の下で述べた予想に、上記の DVF の構成法についての予想を上乗せしたものに対するチェックの一つとなる。現時点でこれに対する答えは $X_r = A_r$ と B_r でほぼイエスといってよい。[BR, KOS][36] 一般の X_r についても次のような exercise は手頃であり、T-system を指示している。

問 7.2 *(7.7)* を用いると、*T-system (4.9)*[37] の左辺の *top term* の積は右辺第一項の *top term* の積と一致することが判る。 では右辺第二項の *top term* の積は左辺の *DVF* の積の内何処に見出すことができるか?

[34] 例えば DVF (2.3) に対し $T_1(u-1)T_1(u+1)$ を考えよ。 (2.8) の $m=1$ により、これは $T_2(u)$ (三項) と $g_1(u)$ (一項) にスプリットし、その各々が pole-free になる。

[35] “minimal” の意味は、それ以上 pole-free な部分和に分解しないという事である。(7.5) ではそれ以外の全ての寄与を T'' と書いた。当然 T'' も pole-free となる。自明に $T''=0$ となる事もあるし、T'' 自身が更に幾つかの pole-free な DVF の和に分解する事もありうる。“minimal な DVF” の一意性を示すのは難しくない。

[36] 『ほぼ』といったのは、 minimality については必ずしも数学的には証明していないから。

[37] 簡単のため、$\forall g_m^{(a)}(u) = \forall P_a(v) = 1$ として考えてよい。

参考文献

[Bax] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London (1982).

[BR] V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin, Restricted solid-on-solid models connected with simply laced algebars and conformal field theory, J. Phys. A. Math. Gen. **23** (1990) 1477–1492.

[Be] H. A. Bethe, Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, Z. Physik **71** (1931) 205–231.

[CFIV] S. Cecotti, P. Fendley, K. Intriligator, C. Vafa, A new supersymmetric index, Nucl. Phys. B**386** (1992) 405.

[CP1] V. Chari, A. Pressley, Quantum affine algebras, Commun. Math. Phys. **142** (1991) 261–283.

[CP2] V. Chari, A. Pressley, Yangians: their representations and characters, q-alg.9508004.

[CP3] V. Chari, A. Pressley, Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices, J. reine angew. Math. **417** (1991) 87–128.

[Ch] I. Cherednik, Qunatum groups as hidden symmetries of classical representation theory, Proc. the XVII International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, ed. A. I. Solomon, (World Scientific, 1989).

[D] V. G. Drinfel'd, A new realization of Yangians and quantum affine algebras, Sov. Math. Dokl.**36** (1988) 212–216.

[FR] E. Frenkel, N. Yu. Reshetikhin, Quantum affine algebras and deformations of the Virasoro and W-algebras, Commun. Math. Phys. **178** (1996) 237–264.

[Ga] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson (1983).

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, in preparation.

[HTI] R. Hirota, S. Tsujimoto, T. Imai, in *Future directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, ed. P.L. Christiansen, J.C. Eilbeck and R.D. Parmentier, Nato ASI series (1992).

[JKMO] M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, The $A_n^{(1)}$ face models, Commun. Math. Phys. **119** (1988) 543–565.

[Ka] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third edition, Cambridge Univ. Press (1990).

[Ki] A. N. Kirillov, Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras, J. Sov. Math. **47** (1989) 2450–2459.

[KR1] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux, J. Sov. Math. **41** (1988) 925–955.

[KR2] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Representations of Yangians and multiplicity of occurrence of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras, J. Sov. Math. **52** (1990) 3156–3164.

[Kl1] M. Kleber, Combinatorial structure of finite-dimensional representations of Yangians: The simply-laced case, IMRN preprint (1997).

[Kl2] M. Kleber, Polynomial relations among characters of quantum affine algebras, preprint.

[KP] A. Klümper, P. A. Pearce, Conformal weights of RSOS lattice models and their fusion hierarchies, Physica A**183** (1992) 304–350.

[KBI] V. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Qunatum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Univ. Press (1993).

[KLWZ] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin, Quantum integrable models discrete classical Hirota equations, Commun. Math. Phys. **188** (1997) 267–304.

[K1] A. Kuniba, Thermodynamics of $U_q(X_r^{(1)})$ Bethe ansatz system with q a root of unity, Nucl. Phys. B**389** (1993) 209–244.

[K2] A. Kuniba, Quantum Jacobi-Trudi formula and analytic Bethe ansatz, *Statistical Models, Yang-Baxter Equation and Related Topics*, ed. M. L. Ge and F. Y. Wu (World Scientific 1996) 228–235.

[KNH] A. Kuniba, S. Nakamura, R. Hirota, Pfaffian and determinant solutions to a Discretized Toda equation for B_r, C_r and D_r, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 1759–1766.

[KN] A. Kuniba, T. Nakanishi, Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 3487–3494.

[KNS1] A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe ansatz, Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 1649–1659.

[KNS2] A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, Functional relations in solvable lattice models: I. Functional relations and representation theory, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 5215–5266.

[KNS3] A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, Functional relations in solvable lattice models: II. Applications, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 5267–5312.

[KOS] A. Kuniba, Y. Ohta, J. Suzuki, Quantum Jacobi-Trudi and Giambelli formulae for $U_q(B_r^{(1)})$ from analytic Bethe ansatz, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 6211-6226.

[KS1] A. Kuniba, J. Suzuki, Analytic Bethe ansatz for fundamental representations of Yangians, Commun. Math. Phys. **173** (1995) 225-264.

[KS2] A. Kuniba, J. Suzuki, Functional relations and analytic Bethe ansatz for twisted quantum affine Lie algebras, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 711-722.

[LS] A. Leznov, M. V. Saveliev, Theory of group representations and integrations of nonlinear systems $x_{a,z\bar{z}} = exp(kx)_a$, Physica **3D** (1981) 62–72.

[Ma] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, New York (1995).

[NT] M. Nazarov, V. Tarasov, Representations of Yangians with Gelgand-Zetlin bases, (1994) preprint.

[OW] E. Ogievetsky, P. Wiegmann, Factorized S-matrix and the Bethe ansatz for simple Lie groups, Phys. Lett. B**168** (1986) 360–366.

[R1] N. Yu. Reshetikhin, The functional equation method in the theory of exactly soluble quantum systems. Sov.Phys.JETP **57** (1983) 691-696.

[R2] N. Yu. Reshetikhin, The spectrum of the transfer matrices connected with Kac-Moody algebras. Lett.Math.Phys.**14** (1987) 235-246.

[RW] M. Yu. Reshetikhin, P. B. Wiegamnn, Towards the classification of completely integrable quantum field theories (The Bethe-Ansatz associated with Dynkin diagrams and their automorphisms), Phys. Lett. B**189** (1987) 125–131.

[SKAO] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 33.

[TK] T. Tsuboi, A. Kuniba, Solutions of a discretized Toda field equation for D_r from analytic Bethe ansatz, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 7785-7796.

[TW] C. A. Tracy, H. Widom, Proofs of two conjectures related to the thermodynamic Bethe Ansatz, Commun. Math. Phys. **179** (1996) 667.

[YY] C. N. Yang, C. P. Yang, Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction, J. Math. Phys. **10** (1969) 1115–1122.

[Z] Al. Zamolodchikov, Painlevé III and 2D polymers, Nucl. Phys. B**432**[FS] (1994) 427–456.