ソリトン・セルオートマトンと量子群

箱玉系

箱が一列にずっと左右の彼方まで並んでいる。箱に玉をいれよう。 玉には青玉と赤玉と二種類あるとし、各箱には玉は高々一個しか入れられないとする。玉の数は任意だが、有限個とする。従って十分遠方は全て空箱である。このような玉の配置を一つ定め、次に一定の規則に従って玉を移動させる。 玉の配置を「状態」と見なし、状態の時間発展を導入しようというわけだ。

(i) 最も左にある青玉を、それより右にある最隣接の空箱に移す。
(ii) まだ動かしてない青玉について、左側のものから順番に (i) と同様に全て一度ずつ動かす。

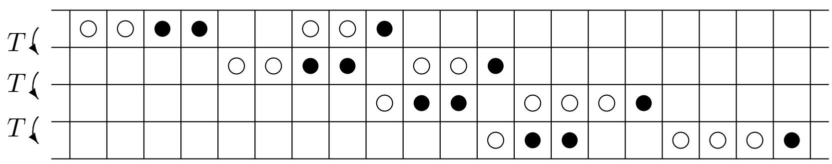
以上の操作を T_b と書こう。 青玉が無くて全部赤玉の状態に対しては T_b は何ら変化を引き起こさないと了解する。赤玉に関して (i)、(ii) と全く同様の操作をすることを T_r と記す。以上の T_b、T_r をもって状態の時間発展を $T = T_rT_b$ と定める。つまり、最初に T_b、次に T_r をするという合成操作を一つの時間ステップの発展 T とみなす。

	$\cdots$	○	●		○	○	●		●				$\cdots$
T_b	$\cdots$		●	○			●	○	●	○			$\cdots$
T_r	$\cdots$			○	●			○		○	●	●	$\cdots$

⟨ 図 1⟩ 時間発展の例。ここでは青玉を白丸、赤玉を黒丸で表してある。
第一行から第三行への変化が $T = T_rT_b$ に対応する。

図 1 に時間発展の例があるので参考にしていただきたい。箱の並びを空間方向、上下を時間方向と見なせば時空間、状態変数全て離散的な時間発展の系、即ち 1 次元のセルオートマトンとなっている。玉の動く様子の感じをつかむため、簡単な場合として青玉 j 個が左側、赤玉 k 個が右側になるように途中に空箱で途切れること無く連続して置かれた配置に着目しよう。但し j と k は 0 以上の任意の整数。以下この連続した $j+k$ 個の玉の並びを $[j,k]$ と表す。簡単な考察から、$[j,k]$ はもし他の全ての箱が空であれば、T により右に $j+k$ 箱分だけ平行移動することが判る。また、$\ldots[j_1,k_1]\ldots[j_2,k_2]\ldots$ のようにそのような配置が複数ある場合も、互いに十分離れていれば、一回の T では影響を及ぼし合わずにそれぞれ j_1+k_1、j_2+k_2 だけ平行移動する。但しここで $\ldots$ により空箱の並びを表した。これにより、$[j,k]$ は粒子的な振る舞いをする波束であることが判る。即ち空間的に局在し、他との相互作用がなければ安定して伝播している。伝播速度 $j+k$ は $[j,k]$ の振幅であり、大きいほど速い。j、k は波束の内部自由度のラベルである。

これら波束の相互作用、即ち衝突における振る舞いを見てみよう。速い（大きい）波束を遅い（小さい）波束の左側に配置した状態から出発して T を繰り返し作用してやれば、いずれ前者は後者に接近してくる。



$\langle$ 図 2$\rangle$ 二つの波束の衝突の例。
内部自由度が $[2,2]\ldots[2,1] \to [1,2]\ldots[3,1]$ と交換している。

図 2 は典型的な 2 体散乱の例であり、以下のことが観測できる。

(S1) 衝突により波束は内部自由度を交換して $\ldots[j_1,k_1]\ldots[j_2,k_2]\ldots \longrightarrow \ldots[j_2',k_2']\ldots[j_1',k_1']\ldots$ となるが、振幅は一定に保たれる。即ち $j_1+k_1 = j_1'+k_1'$、$j_2+k_2 = j_2'+k_2'$ が成立する。
(S2) 衝突の前後で位相のずれが生じる。

位相のずれとは、例えば衝突後の $[j_1',k_1']$ の軌道が、元々の $[j_1,k_1]$ が相互作用なしに伝播した場合と比べて横にずれているという意味である。

3 体そしてより多体の衝突も、各波束が十分多くの空箱で隔たっているという初期状態からの時間発展を追跡すれば、少なくとも実験的に調べることができる。それによれば

(1) 衝突の前後で波束の振幅の集合は保存、特に波束の個数は保存。
(2) 衝突後の波束の内部自由度のラベルは 2 体の場合の散乱規則 (S1)、(S2) を合成したもので与えられる。

少し説明を補足しよう。(1) で同じ振幅の波束が複数いる場合はその重複度まで込みで保存する。(2) で例えば振幅が 3 と 2 と 1 の三つの波束が初期状態で左からこの順序に並んでいた場合、衝突後の振幅は 1、2、3 という具合に逆順になる。置換 $321 \to 123$ を互換の積として表すやり方は一意的ではないが、各互換に内部自由度の交換 (S1) を対応させると最終的に得られる多体系全体の内部自由度の交換結果は皆等しい。各波束の最終的な位相のずれについても同様である。実はこれらの性質は数学的に証明されている。

ソリトン・セルオートマトン

前節で紹介した箱玉系の特徴を物理的に表現すれば、多体散乱は 2 体散乱の積に因子化し、2 体散乱の順序に寄らない。このような顕著な性質をもった散乱は因子化散乱と呼ばれる。実は因子化散乱は、連続な $1+1$ 次元時空上の

可積分な場の理論という設定のもとでは1970年代後半から詳しく研究されていた。それは言わばソリトンの場の理論である。箱玉系はそのセルオートマトンとしてのモデルとも考えられ、因子化散乱する箱玉系の波束 $[j,k]$ はまさしくソリトンと呼ぶにふさわしい。ソリトンの存在は可積分性の象徴である。箱玉系は可積分なセルオートマトン即ちソリトン・セルオートマトンの素晴らしい具体例なのである。ここに紹介したものは高橋大輔氏、薩摩順吉氏 [1] らにより導入されたもので、実は玉の種類は 2 種類と限らず一般に $n(n \geq 1)$ 種類あっても同様の性質があることが知られている。また、箱の容量を 2 以上に一般化することなども行われている。そのような拡張については後で少しだけ触れることにし、ここでは可積分系としての基本的な性質に目を向けてみよう。たとえばソリトン解を構成できるか、時間発展 T と可換な高次の時間発展を構成できるか、それらの保存量は、といった問題である。以下に述べるように、実は箱玉系は古典可積分性と量子可積分性の二つの側面を併せ持っており、それらの関係に新しい知見を投げかけている。

ソリトン方程式の超離散化

ソリトン方程式 [2] とはコルテヴェーグ・ドフリース方程式、サイン・ゴルドン方程式、戸田方程式などに代表される一群の可積分な非線形波動方程式の総称である。これらはソリトン解を持ち、リュービルの意味で可積分な古典力学系である。箱玉系の時間発展を記述するべく、ソリトン方程式との間に何らかのつながりを見出そうとするのは自然な試みである。ただし、ソリトン方程式の従属変数は一般に連続変数であるのに対し、箱玉系では離散変数という違いに注意しよう。このギャップは超離散化というアイデアにより克服された。文献 [3] には玉の種類が 1 種類の場合に即してこの方法の考案者らが丁寧な解説をされている。今 a と b を実数とすると以下の式が成立することに注目しよう。$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log(\exp(a/\epsilon)+\exp(b/\epsilon)) = \max(a,b)$。同様に $\log$ のなかで $+$ を $\times$ に置き換えれば右辺は $a+b$ である。つまりこの極限は演算 $+$ を $\max$ に、$\times$ を $+$ に置き換える操作である。これにより $A(B+C) = AB+AC$ という分配則は $a+\max(b,c) = \max(a+b, a+c)$ に移行して保たれる。超離散化とはソリトン方程式にこの変換を施す操作のことである。その結果は本質的に $+$ と $\max$ だけからなる区分的に線型な方程式となるが、上手い具合に丁度それが箱玉系の時間発展の方程式となるようなソリトン方程式が存在するのである。これによりソリトン方程式に関して蓄積していた多くの概念や手法が箱玉系の解析に輸入できるようになり、後者についてソリトン解や保存量が構成された。こうして箱玉系は古典可積分系の超離散極限として位置づけられるに至った。

可解格子模型の結晶化

超離散化の少し後、前世紀の末に箱玉系を量子可積分系と関係付ける発見があった。量子可積分性は古典可積分性ほど確立された概念ではないが、概

ね系の自由度に見合うだけの互いに可換な演算子が存在する事であると了解されている。ハミルトニアンはそのひとつである。本稿に関係する量子可積分系の具体例は、2 次元正方格子上に定式化される統計力学のスピン模型で、厳密解の知られている一群のクラスのものである。有名なイジング模型の親戚筋にあたるが、ここでは単に可解格子模型と呼ぼう。これらの模型には温度に相当するパラメータ q が入っていて、それを 0 にすると、スピンは凍りつく。例えば 2 次元格子で北西の境界条件を指定すると残りの全てのスピンはそれに応じて一義的に決定される。実はこの凍りついたスピン配列が、図 1、2 のような箱玉系の時間発展のパターンと一致するのである [4–6]。温度 0 では結晶になるという意味で、$q = 0$ にとることを結晶化と呼ぶならば、標語的に「箱玉系は可解格子模型の結晶化である」と言う事ができる。この描像により、量子可積分系の対称性、即ち量子群 [7] との関係が明確になった。特に $q = 0$ における量子群、即ちクリスタル基底の理論 [8] による解析は有効である。例えば T_b、T_r という玉の移動操作は本質的にワイル群の作用であることが判る。また、アフィンリー環に応じて箱玉系の一般化に相当するソリトン・セルオートマトンが系統的に構成される [4]。典型的な例は、赤や青の補色を持った玉もあって、補色の玉同士の対消滅・生成を許すようなオートマトンなどである。このように一般化されたオートマトンにおけるソリトン、2 体散乱則、可換な高次の時間発展、保存量などは、クリスタル理論により良く理解されている。

なんとなくトロピカル

箱玉系はソリトン方程式と可解格子模型がそれぞれ超離散化と結晶化によってつぶれて歩み寄った接点にあった。両者が一致するメカニズムはいまだ解明されていない。凍りついたスピンをどう融かすのか、単に $q \neq 0$ としたのでは元の木阿弥である。どうやら、量子群は一旦結晶化すると、別の融かし方があるらしい、超離散化の逆操作に上手く対応するような。それはコチコチに凍ったクリスタルに比べると「なんとなくトロピカル」[9] な世界らしい。我々の現在のとぼしい知識と技術では、ブラックホールからホワイトホールを伝って別の宇宙に行くような冒険に思えるが、それは新たな挑戦を待っている。

本稿の内容に関してご意見をいただいた共同研究者の尾角正人氏、高木太一郎氏、山田泰彦氏に感謝いたします。

参考文献

1)D.Takahashi and J.Satsuma: J.Phys.Soc.Jpn.**59**,3514 (1990).
2) 戸田盛和:「非線形波動とソリトン」日本評論社、(1983).
3) 時弘哲治, 薩摩順吉, 松木平淳太, 高橋大輔: 日本物理学会誌 **52** 276 (1997).
4)G.Hatayama, A.Kuniba and T.Takagi: Nucl.Phys.B**577**[PM],619 (2000).
5)K.Fukuda, M.Okado and Y.Yamada: Int.J.Mod.Phys.A**15**,1379 (2000).

6)G.Hatayama, K.Hikami, R.Inoue, A.Kuniba, T.Takagi and T.Tokihiro: J.Math.Phys.**42**,274 (2001).
7) 神保道夫: 「量子群とヤン・バクスター方程式」シュプリンガー・フェアラーク、(1990).
8) 柏原正樹: 数学（岩波書店）**44** 330,(1992).
9) 野海正俊: 2001 年 9 月, 可積分系研究会での講演.