

ϕ^4 模型の摂動論的くりこみ

Minimal subtraction scheme による

2-loop の計算と臨界指数の ϵ 展開

2008 年度 冬学期補遺

東京大学 大学院 総合文化研究科 (University of Tokyo)

国場 敦夫 (Atsuo Kuniba)

version 21/Apr/2008

1 Formulas

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + O(\epsilon) \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma, \quad (2)$$

$$\psi(1) = -\gamma = -0.5772\dots \text{ (Euler const)}, \quad (3)$$

$$\int_0^1 \log(1 + ax(1-x)) = -2 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{a}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4}{a}} - 1}, \quad (4)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + M^2 + 2qp)^A} = \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(M^2 - p^2)^{A-\omega}}, \quad (5)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu}{(q^2 + M^2 + 2qp)^A} = -\frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(M^2 - p^2)^{A-\omega}}. \quad (6)$$

$$\frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_k^{a_k}} = \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_k)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_k)} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_k \frac{\delta(1 - x_1 - \dots - x_k) x_1^{a_1-1} \dots x_k^{a_k-1}}{(x_1 D_1 + \dots + x_k D_k)^{a_1 + \dots + a_k}}. \quad (7)$$

最後の式は Feynman 公式と呼ばれる。

2 Feynman 規則

ϕ^4 理論の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g\mu^\epsilon\phi^4 \quad (8)$$

$$\text{空間の次元 : } d = 2\omega, \quad \epsilon = 2\epsilon, \quad d = 4 - \epsilon, \quad \omega = 2 - \epsilon. \quad (9)$$

$$\text{無次元化された質量と結合定数} \quad : \hat{m}^2 = \frac{m^2}{4\pi\mu^2}, \quad \alpha = \frac{g}{(4\pi)^2}. \quad (10)$$

d と ω , ε と ϵ , g と α , m^2 と \hat{m}^2 など, 余分な記号ではあるが, あえて併用する. 計算の途中ではおもに ω, ϵ, α を用い, ε は最終段階で用いる. その方が微妙に楽なようである. m, μ は (長さ)⁻² の次元, g は無次元のパラメーターである.

汎関数積分 $\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x \mathcal{L}}$ の摂動展開により指定される proper vertex (1 粒子既約頂点関数) の計算規則を与えよう.

Feynman 図の外線の数 E , 内線の数 I , 頂点の数 V , 独立なループの数 L とする. Feynman 図 (以後 Feynman 振幅と同義語として用いる) は L 個の d 次元運動量についての積分, つまり Ld 重積分である. E, I, V, L には以下の関係がある.

$$L = I - V + 1, \quad 4V = E + 2I.$$

第一の関係はグラフのトポロジーによる. 第二の関係は ϕ^4 理論では頂点が 4-valent であることの反映である. 以下では proper vertex $\Gamma^{(E)}$ で $E = 2, 4$ の場合が問題となる. I を消去すると, 摂動の次数 V と loop 数 L は

$$V = \begin{cases} L & E = 2, \\ L + 1 & E = 4 \end{cases} \quad (11)$$

という単純な関係にあることが分かる.

Feynman 図が与えられたとき, その計算規則 (運動量空間でのバージョン) は以下の通り.

1. 外線の運動量を指定する. (以下では規約として全て「内向き」を正にとる.)
2. 各頂点で保存則を満たすように内線に運動量を付与. (独立な内線運動量は L 個ある.)
3. 各頂点に因子 $(-g\mu^\varepsilon/4!)$ を付与.
4. 運動量 q の内線に因子 $G_0(q) = (q^2 + m^2)^{-1}$ を付与.
5. 独立な内線運動量 q について積分 $\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}}$ を実行.
6. Feynman 図の重複度 (Wick 定理でペアに縮約する仕方の数) をかける.

Proper vertex とは, 連結な Feynman 図で, どの内線 1 本を切断してもなお連結なものを指し, 1 粒子既約頂点関数とも呼ばれる.

3 $\Gamma^{(2)}(p)$ と自己エネルギー

自己エネルギーを $\Sigma(p)$ とするとプロパゲーター $G(p)$ は自由場のプロパゲーター $G_0(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}$ を用いて

$$\begin{aligned} G(p) &= G_0(p) + G_0(p)\Sigma(p)G_0(p) + G_0(p)\Sigma(p)G_0(p)\Sigma(p)G_0(p) + \cdots \\ &= \frac{G_0(p)}{1 - \Sigma(p)G_0(p)} \end{aligned}$$

と表される. $\Gamma^{(2)}(p)$ はプロパゲーターの逆数であり,

$$\Gamma^{(2)}(p) = G_0^{-1}(p) - \Sigma(p) = p^2 + m^2 - \Sigma(p) \quad (12)$$

となる. そこで以下では自己エネルギー $\Sigma(p)$ を摂動的に求める.

3.1 Tadpole (1-loop)



右図は縮約の場合の数の勘定を表す．●の四つ組みが $-g\mu^{2\epsilon}\phi^4/4!$ に対応する．数字を書き添えていない線の縮約の重複度は1とする．よって数係数は $-\boxed{3 \times 4}/4! = -1/2$ である．ここで重複度を枠で囲んだのは n 成分系の計算 (9 節) での便宜のためである．

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}} = -\frac{1}{2}g\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{l^2 + m^2}. \quad (13)$$

これは実は外線運動量 p に依らない．公式 (5) により積分を実行すると

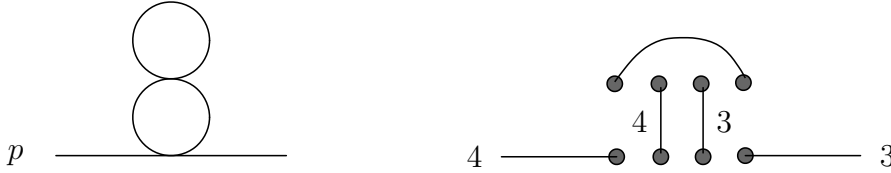
$$\begin{aligned} \Sigma(p)_{\text{tadpole}} &= -\frac{1}{2}g\mu^{2\epsilon} \frac{\Gamma(1-\omega)}{(4\pi)^\omega (m^2)^{1-\omega}} = -\frac{1}{2}m^2 \frac{g}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^\epsilon \Gamma(-1+\epsilon) \\ &= -\frac{1}{2}m^2 \alpha(\hat{m}^2)^{-\epsilon} \Gamma(-1+\epsilon) \end{aligned}$$

となる．(1) を用いて $\epsilon \rightarrow 0$ での発散を評価して

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}} = m^2 \frac{\alpha}{2\epsilon} (1 + \epsilon(\psi(2) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)) \quad (14)$$

を得る．

3.2 Double scoop (2-loop)



数係数は右図から $\boxed{(3 \times 4)^2}/(4!)^2 = 1/4$ である．

$$\Sigma(p)_{\text{d-scoop}} = \frac{1}{4}(g\mu^{2\epsilon})^2 \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{l^2 + m^2} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2}. \quad (15)$$

これも p に依らない．Tadpole (13) と比べると

$$\Sigma(p)_{\text{d-scoop}} = \Sigma(p)_{\text{tadpole}} \times \left(-\frac{1}{2}g\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \right) \quad (16)$$

となっているので，括弧の中の評価をすればよい．(5) により

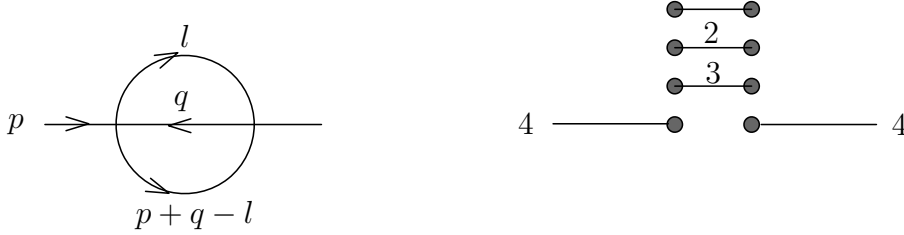
$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}g\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = -\frac{1}{2}g\mu^{2\epsilon} \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega (m^2)^{2-\omega}} \\ &= -\frac{1}{2}\alpha(\hat{m}^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) = -\frac{\alpha}{2\epsilon} (1 + \epsilon(\psi(1) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)). \end{aligned} \quad (17)$$

よって

$$\Sigma(p)_{\text{d-scoop}} = -m^2 \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2} (1 + \epsilon(\psi(2) + \psi(1) - 2 \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)) \quad (18)$$

を得る .

3.3 Sunset (2-loop)



数係数は右図から $\boxed{2 \times 3 \times 4^2} / (4!)^2 = 1/6$ である .

$$\Sigma(p)_{\text{sunset}} = \frac{(g\mu^{2\epsilon})^2}{6} I, \quad (19)$$

$$I = \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)}. \quad (20)$$

この節の目標は , $\epsilon \rightarrow 0$ における発散の評価

$$\Sigma(p)_{\text{sunset}} = -\frac{\alpha^2}{6} \left(\frac{3m^2}{2\epsilon^2} + \frac{3m^2}{\epsilon} \left(\frac{3}{2} + \psi(1) - \log \hat{m}^2 \right) + \frac{1}{4\epsilon} p^2 + O(\epsilon^0) \right). \quad (21)$$

を導出である . まず I の表式に

$$1 = \frac{1}{4\omega} \left(\frac{\partial l_\mu}{\partial l_\mu} + \frac{\partial q_\mu}{\partial q_\mu} \right) \quad (\mu - \text{sum}) \quad (22)$$

を挿入して部分積分すると

$$I = -\frac{1}{4\omega} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \left(l_\mu \frac{\partial}{\partial l_\mu} + q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) \frac{1}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)}. \quad (23)$$

微分を実行すると被積分関数は以下の 4 項にわかれる .

$$\begin{aligned} & \frac{-2l^2}{(l^2 + m^2)^2(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)} + \frac{-2l(l - p - q)}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)^2} \\ & + \frac{-2q^2}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)^2([q + p - l]^2 + m^2)} + \frac{-2q(q + p - l)}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

分母を揃えたい . それには第 1 項で $l \leftrightarrow p + q - l$, 第 3 項で $q \leftrightarrow p + q - l$ と置き換える . 後で q, l で積分するのでこれは許される . 結果は

$$\begin{aligned} & \frac{-4(p + q - l)^2 + 2(l - q)(p + q - l)}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)^2} = \frac{-6(p + q - l)^2 - 6m^2 + 6m^2 + 2p(p + q - l)}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)^2} \\ & = \frac{-6}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)} + \frac{6m^2 + 2p(p + q - l)}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)^2}. \end{aligned}$$

この形を (23) に代入すると，第 1 項は元の I の式 (20) に一致するので，以下の関係式を得る．

$$I = -\frac{1}{4\omega} \left(-6I + \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{6m^2 + 2p(p+q-l)}{(l^2+m^2)(q^2+m^2)([q+p-l]^2+m^2)^2} \right). \quad (25)$$

残った積分を

$$K(p) = \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2+m^2)(q^2+m^2)([q+p-l]^2+m^2)^2}, \quad (26)$$

$$K_\mu(p) = \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(p+q-l)_\mu}{(l^2+m^2)(q^2+m^2)([q+p-l]^2+m^2)^2} \quad (27)$$

と定義すると，(25) と (19) から

$$\Sigma(p)_{\text{sunset}} = \frac{-1}{2\omega-3} \frac{(g\mu^{2\epsilon})^2}{6} (3m^2 K(p) + p_\mu K_\mu(p)) \quad (28)$$

が従う．(μ -sum をとっている．)

• $K(p)$ の評価．(26) で再び $l \leftrightarrow p+q-l$ とすると分母は $(l^2+m^2)([q+p-l]^2+m^2)(q^2+m^2)^2$ となるが，このうち始めの二つを Feynman 公式 (7) でまとめた後に $l \rightarrow l+x(p+q)$ と置き換え

$$\begin{aligned} K(p) &= \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2+m^2)^2} \int_0^1 \frac{dx}{(l^2+m^2+(p+q)^2x(1-x))^2} \\ &= \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2+m^2)^2 (m^2+(p+q)^2x(1-x))^{2-\omega}}. \end{aligned}$$

ここで l での積分は (5) による．分母から因子 $(x(1-x))^{2-\omega}$ を抽出した後に再び Feynman 公式でまとめ， q について積分する．

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\Gamma(4-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{1-\omega} (1-y) \\ &\quad \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left[q^2 + p^2 y(1-y) + m^2 \left(1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{\omega-4} \\ &= \frac{\Gamma(4-2\omega)}{(4\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{1-\omega} (1-y) \left[q^2 + p^2 y(1-y) + m^2 \left(1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{2\omega-4} \\ &= \frac{\Gamma(2\epsilon)}{(4\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{-\epsilon} \int_0^1 dy y^{-1+\epsilon} (1-y) \left[p^2 y(1-y) + m^2 \left(1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{-2\epsilon}. \end{aligned}$$

$$Z = Z(x, y) = p^2 y(1-y) + m^2 \left(1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \quad (29)$$

とおく． $y^{-1+\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dy} y^\epsilon$ を用いて y について部分積分すると

$$K(p) = \frac{\Gamma(2\epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx (x(1-x))^\epsilon \int_0^1 dy y^\epsilon \frac{d}{dy} [-(1-y)Z^{-2\epsilon}].$$

この2重積分は $\epsilon \rightarrow 0$ で有限である．これを $O(\epsilon^1)$ まで評価しよう．

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx (x(1-x))^\epsilon \int_0^1 dy y^\epsilon \frac{d}{dy} [-(1-y) + 2\epsilon(1-y) \log Z] + O(\epsilon^2) \\
&= \int_0^1 dx (x(1-x))^\epsilon \int_0^1 dy y^\epsilon + 2\epsilon \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{d}{dy} [(1-y) \log Z] + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)(1+\epsilon)} - 2\epsilon \int_0^1 dx \log Z(x, y=0) + O(\epsilon^2) \\
&= 1 + \epsilon - 2\epsilon \log m^2 + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

よって (26) から

$$K(p) = \frac{\Gamma(2\epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{4-2\epsilon}} (1 + \epsilon - 2\epsilon \log m^2 + O(\epsilon^2)). \quad (30)$$

• $p_\mu K_\mu(p)$ の評価． $K_\mu(p)$ の定義 (27) で $l \rightarrow p + q - l$ と置き換え，Feynman 公式で分母のうち二つをまとめる．その後 q についての積分を (5) で実行する．

$$\begin{aligned}
K_\mu(p) &= \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)(l^2 + m^2)^2} \\
&= \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2 + m^2)^2} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 \frac{dx}{[q^2 + m^2 + x(1-x)(p-l)^2]^2} \\
&= \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2 + m^2)^2} \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 + x(1-x)(p-l)^2]^{2-\omega}}.
\end{aligned}$$

分母から因子 $(x(1-x))^{2-\omega}$ を抽出した後に Feynman 公式でまとめると

$$\begin{aligned}
K_\mu(p) &= \frac{\Gamma(4-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{1-\omega} (1-y) \\
&\quad \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{\left[(l-yp)^2 + y(1-y)p^2 + m^2 \left(1 - y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{4-\omega}}
\end{aligned}$$

$l \rightarrow l + yp$ とずらし， l の奇関数の積分は 0 になることを用いる．その後で l 積分を実行する．

$$\begin{aligned}
p_\mu K_\mu(p) &= p^2 \frac{\Gamma(4-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{2-\omega} (1-y) \\
&\quad \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{\left[l^2 + y(1-y)p^2 + m^2 \left(1 - y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{4-\omega}} \\
&= p^2 \frac{\Gamma(4-2\omega)}{(4\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{2-\omega} (1-y) \left[y(1-y)p^2 + m^2 \left(1 - y + \frac{y}{x(1-x)} \right) \right]^{2\omega-4} \\
&= p^2 \frac{\Gamma(2\epsilon)}{(4\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{-\epsilon} \int_0^1 dy y^\epsilon (1-y) Z(x, y)^{-2\epsilon}.
\end{aligned}$$

ここで Z は (29) で定義されたものである．この積分は $\epsilon \rightarrow 0$ で有限であり，以下の評価を得る．

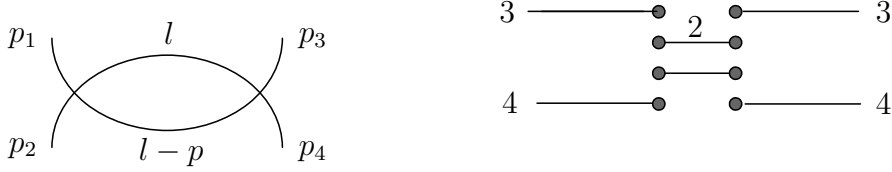
$$p_\mu K_\mu(p) = p^2 \frac{\Gamma(2\epsilon)}{(4\pi)^{4-2\epsilon}} \left(\frac{1}{2} + O(\epsilon) \right). \quad (31)$$

(30) と (31) から (21) が従う．

4 $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$

$\Gamma^{(4)}$ の定義は $e^{-\mathcal{L}}$ の展開から生じる 1 粒子既約 4 点 Feynman 振幅の外線因子を除去したものを $\times(-1)$ とする．この (-1) 倍は 0-loop で $\Gamma^{(4)} = +g\mu^{2\epsilon}$ となるために必要である．また，これにより，[Ramond] の $\Gamma^{(4)}$ とは符号が逆になることに注意．例えば [Ramond] の (5.6) 式をみよ． ($\Gamma^{(2)}$ の符号は一致する．)

4.1 Fish (1-loop)



右図から数係数は $-\boxed{2 \times 3^2 \times 4^2} / (4!)^2 = -1/2$ である．

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} \\ = \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_3, p_2, p_4)_{\text{fish}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_4, p_2, p_3)_{\text{fish}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} = -\frac{1}{2}(g\mu^{2\epsilon})^2 \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)[(l-p)^2 + m^2]} \quad (p = p_1 + p_2). \quad (33)$$

分母を Feynman 公式でまとめた後に l で積分する．

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} &= -\frac{1}{2}(g\mu^{2\epsilon})^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[(l-xp)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^2} \\ &= -\frac{1}{2}(g\mu^{2\epsilon})^2 \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 + x(1-x)p^2]^{2-\omega}}. \end{aligned}$$

$\omega = 2 - \epsilon$ に注意してこれを $O(\epsilon^1)$ まで評価すると

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} \\ &= -\frac{1}{2}(g\mu^{2\epsilon})^2 \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx (1 - \epsilon \log [m^2 + x(1-x)p^2] + O(\epsilon^2)) \\ &= -\frac{1}{2}(g\mu^{2\epsilon})^2 \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left[1 - \epsilon \left(-2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} + \log m^2 \right) + O(\epsilon^2) \right] \\ &= -g\mu^{2\epsilon} \frac{\alpha}{2\epsilon} \left[1 + \epsilon \left(2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} \right) + O(\epsilon^2) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで x の積分には (4) を用いた．これと (32) から以下の結果を得る．

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} = -g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon} [1 + \epsilon (2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - F) + O(\epsilon^2)]. \quad (35)$$

但し F は

$$F = \frac{1}{3} \sum_{(a,b)=(1,2),(1,3),(1,4)} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{ab}}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{ab}}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{ab}}} - 1}, \quad (p_{ab} = (p_a + p_b)^2) \quad (36)$$

で定義される．次の Glass の計算の便宜上，結局

$$\begin{aligned} & g\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)[(l-p)^2 + m^2]} \\ &= \frac{\alpha}{\epsilon} \left[1 + \epsilon \left(2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} \right) + O(\epsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

という評価であったことを注意しておく．

4.2 Glass (2-loop)



数係数は右図から $\boxed{2 \times 3^3 \times 4^3} / (4!)^3 = 1/4$ である．

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} \\ &= \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_3, p_2, p_4)_{\text{glass}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_4, p_2, p_3)_{\text{glass}}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} = \frac{1}{4} (g\mu^{2\epsilon})^3 \left(\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)[(l-p)^2 + m^2]} \right)^2 \quad (p = p_1 + p_2). \quad (39)$$

(37) から直ちに

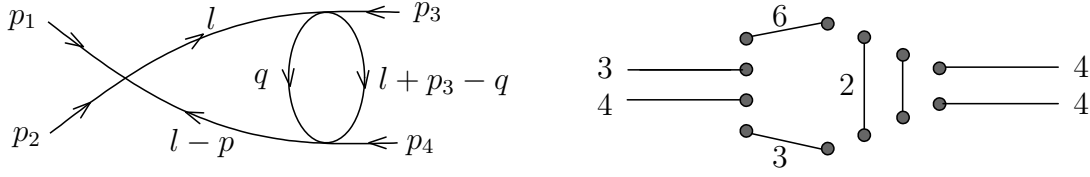
$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} \\ &= g\mu^{2\epsilon} \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon \left(2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} \right) + O(\epsilon^2) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

が得られる．従って (38) は $\epsilon \rightarrow 0$ で以下の特異性を持つ．

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} = g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha^2}{4\epsilon^2} [1 + \epsilon (4 + 2\psi(1) - 2 \log \hat{m}^2 - 2F) + O(\epsilon^2)]. \quad (41)$$

但し F は (36) で定義される．

4.3 Lobster (2-loop)



縮約の仕方は図を左右反転したものもあるので (p_1 が上図の p_3 あるいは p_4 の所に配置される状況といってもよい), 数係数は更に 2 倍して, $2 \times \frac{2 \times 3^2 \times 4^3 \times 6}{(4!)^3} = 1$ となる.

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_3, p_2, p_4)_{\text{lobster}} + \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_4, p_2, p_3)_{\text{lobster}}. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= (g\mu^{2\epsilon})^3 \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)((l-p)^2 + m^2)(q^2 + m^2)((l+p_3-q)^2 + m^2)}. \end{aligned} \quad (43)$$

この節の目標は $\epsilon \rightarrow 0$ における発散の評価

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha^2}{2\epsilon^2} \left(1 + \epsilon \left(5 + 2\psi(1) - 2 \log \hat{m}^2 - 2F \right) + O(\epsilon^2) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

の導出である. ここで F は (36) で定義される.

まず (43) の分母の後半の二つを Feynman 公式でまとめた後に q で積分すると

$$(g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)((l-p)^2 + m^2)} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 + x(1-x)(l+p_3)^2]^{2-\omega}}. \quad (45)$$

分母から $(x(1-x))^{2-\omega}$ を抽出した後に三つの因子を Feynman 公式でまとめる.

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= -(g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(4-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy_2 \int_0^{1-y_2} dy_1 y_1^{1-\omega} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} [(l + y_1 p_3 - y_2 p)^2 + V]^{\omega-4},$$

$$V = y_1(1-y_1)p_3^2 + y_2(1-y_2)p^2 + 2y_1y_2pp_3 + m^2 \left(1 - y_1 + \frac{y_1}{x(1-x)} \right). \quad (47)$$

l 積分を実行して

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= (g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(4-2\omega)}{(4\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\omega-2} \int_0^1 dy_2 \int_0^{1-y_2} dy_1 y_1^{1-\omega} \frac{1}{V^{4-2\omega}}, \\ &= (g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(2\epsilon)}{(4\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{-\epsilon} \int_0^1 dy_2 \int_0^{1-y_2} dy_1 y_1^{\epsilon-1} \frac{1}{V^{2\epsilon}}. \end{aligned} \quad (48)$$

これに y_1 についての積分の評価

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-y_2} dy_1 y_1^{\epsilon-1} \frac{1}{V^{2\epsilon}} &= \frac{1}{V(y_1=0)^{2\epsilon}} \int_0^{1-y_2} dy_1 y_1^{\epsilon-1} + O(\epsilon) \\
&= \frac{(1-y_2)^\epsilon}{\epsilon [y_2(1-y_2)p^2 + m^2]^{2\epsilon}} + O(\epsilon) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left((1-y_2)^\epsilon - 2\epsilon \log [y_2(1-y_2)p^2 + m^2] \right) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{49}$$

を代入し, x, y_2 積分を実行する. y_2 での積分には (4) を用いる.

$$\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\
&= (g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{(4\pi)^{4-2\epsilon}\Gamma(2-2\epsilon)\epsilon} \int_0^1 dy_2 \left((1-y_2)^\epsilon - 2\epsilon \log [y_2(1-y_2)p^2 + m^2] + O(\epsilon^2) \right) \\
&= (g\mu^{2\epsilon})^3 \frac{\Gamma(2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{(4\pi)^{4-2\epsilon}\Gamma(2-2\epsilon)\epsilon} \left[\frac{1}{1+\epsilon} - 2\epsilon \left(-2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} + \log m^2 \right) + O(\epsilon^2) \right].
\end{aligned}$$

これは $\epsilon \rightarrow 0$ で以下の特異性を持つ.

$$\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\
&= g\mu^{2\epsilon} \frac{\alpha^2}{2\epsilon^2} \left(1 + \epsilon \left(5 + 2\psi(1) - 2 \log \hat{m}^2 - 2\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - 1} \right) + O(\epsilon^2) \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

これと (42) から評価 (44) を得る.

5 Minimal subtraction scheme

minimal subtraction scheme によるくりこみの処方箋を与えよう. この章では $\epsilon = 2 - \omega$ でなく $\epsilon = 4 - d$ を用いる.

5.1 くりこみ定数

Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g\mu^\epsilon\phi^4 \tag{51}$$

に相殺項 (counter term)

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}} = \frac{1}{2}A(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2B\phi^2 + \frac{1}{4!}g\mu^\epsilon C\phi^4 \tag{52}$$

を付加したものを

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}} = \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 + \frac{1}{4!}g_0\phi_0^4 \tag{53}$$

と書いて

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi, \quad m_0^2 = Z_m m^2, \quad g_0 = Z_g g \mu^\varepsilon \quad (54)$$

とおくと

$$Z_\phi = 1 + A, \quad Z_m = \frac{1 + B}{1 + A}, \quad Z_g = \frac{1 + C}{(1 + A)^2} \quad (55)$$

となる． m_0, g_0 をそれぞれ裸の質量 (bare mass) , 結合定数 (bare coupling constant) という．

Minimal subtraction scheme とは相殺項を以下の 1, 2 を満たす様に選ぶくりこみの処方箋である．

1. g についての摂動の V 次で $\Gamma^{(2)}(p)$ と $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ の $\varepsilon = 0$ の極の主要部を mod $O(g^{V+1})$ で相殺．つまり $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ ではそれぞれ $O(g^L), O(g^{L+1})$ までを相殺する．
2. 相殺項自体は ε の関数として $\varepsilon^{-1} \times (\varepsilon^{-1}$ の多項式) . つまり $\varepsilon \rightarrow 0$ での有限部分は 0 に選ぶ．

これによりくりこみ定数 Z_ϕ, Z_m, Z_g は, ε^{-1} についての形式的冪級数として次のように決定される．

$$Z_\phi(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_\phi^{(k)}(g)}{\varepsilon^k}, \quad Z_m(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_m^{(k)}(g)}{\varepsilon^k}, \quad Z_g(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_g^{(k)}(g)}{\varepsilon^k}. \quad (56)$$

Minimal subtraction scheme の利点として, これらは非自明なことに, mass parameter m, μ に依らない．それゆえ mass-independent renormalization とも呼ばれる．

細かい, けれど重要な注意．4 点関数 $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ は 0-loop の寄与 $g\mu^\varepsilon$ を補正したものに相当する．このことを反映させて最終結果では overall に因子 $g\mu^\varepsilon$ を 1 乗だけ残し, それ以外の部分のみ ε で展開する．(4 節の結果はこの形式で与えてある．) そうして定まる $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots$ の係数から相殺項の係数が決定される．

5.2 くりこみ群関数 $\beta(g, \varepsilon), \gamma_m(g), \gamma_\phi(g)$

m_0, g_0 は mass scale μ に依存しない．一方 $m_0^2 = Z_m(g, \varepsilon)m^2, g_0 = Z_g(g, \varepsilon)g\mu^\varepsilon$ であるから, m, g は μ (と ε) に依存する．この依存性を特徴付けるのが $\beta(g, \varepsilon), \gamma_m(g)$ である．(以下では g, m の ε 依存性は略して $g = g(\mu), m = m(\mu)$ 等と書く．) まず beta 関数を

$$\beta(g, \varepsilon) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \quad (57)$$

で定義して

$$0 = \frac{dg_0}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} (Z_g(g, \varepsilon)g\mu^\varepsilon)$$

を要請すると

$$\beta(g, \varepsilon) = \frac{-\varepsilon g}{1 + g \frac{\partial}{\partial g} \log Z_g(g, \varepsilon)} \quad (58)$$

が導かれる．つまり, beta 関数はくりこみ定数 $Z_g(g, \varepsilon)$ により決定される．(56) を代入すると $\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + (\varepsilon^{-1}$ の形式的冪級数) となる．一方 beta 関数は $\varepsilon = 0$ で解析的であるという物

理的期待は，この ε^{-1} の形式的冪級数が実は定数項 ($(\varepsilon^{-1})^0$ の項) だけになっている (!) ことを示唆する．これを認めると

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \beta(g), \quad \beta(g) = g^2 \frac{dZ_g^{(1)}(g)}{dg} \quad (59)$$

が得られる． $\beta(g)$ は 4 次元における beta 関数である．(58) は $\beta(g, \varepsilon)$ の代わりに $\beta(g)$ を用いると

$$\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} (gZ_g(g, \varepsilon)) = \varepsilon g^2 \frac{\partial}{\partial g} Z_g(g, \varepsilon)$$

とかけるので， ε^{-i} の係数比較から漸化式

$$\beta(g) \frac{d}{dg} (gZ_g^{(i)}(g)) = g^2 \frac{d}{dg} Z_g^{(i+1)}(g) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (60)$$

が従う．($Z_g^{(0)}(g) = 1$ とおいた．) (59) の第 2 式はこれの $i = 0$ の場合である．

次に $\gamma_m(g, \varepsilon)$ $\gamma_\phi(g, \varepsilon)$ を

$$\gamma_m(g, \varepsilon) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_m(g, \varepsilon) = \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} \log Z_m(g, \varepsilon), \quad (61)$$

$$\gamma_\phi(g, \varepsilon) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_\phi(g, \varepsilon) = \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} \log Z_\phi(g, \varepsilon) \quad (62)$$

により定義する． $\gamma_m(g, \varepsilon)$ の定義は，

$$0 = \frac{dm_0^2}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} (Z_m(g, \varepsilon)m^2)$$

を考慮すると

$$\gamma_m(g, \varepsilon) = -2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu} = -\frac{\partial \log m^2}{\partial \log \mu} \quad (63)$$

とも述べられる．

(61) , (62) に (56) と (59) を代入すると

$$\begin{aligned} \gamma_m(g, \varepsilon) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_m^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} \right) &= (-\varepsilon g + \beta(g)) \frac{\partial}{\partial g} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_m^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}, \\ \gamma_\phi(g, \varepsilon) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_\phi^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} \right) &= (-\varepsilon g + \beta(g)) \frac{\partial}{\partial g} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_\phi^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}. \end{aligned} \quad (64)$$

右辺は ε^{-1} についての形式的冪級数である．一方 $\gamma_m(g, \varepsilon)$, $\gamma_\phi(g, \varepsilon)$ は beta 関数と同様に $\varepsilon = 0$ で解析的であると期待されるので，上の関係式は $\gamma_m(g, \varepsilon)$, $\gamma_\phi(g, \varepsilon)$ は ε に依らない (!) ことを示唆する．これを認めると

$$\gamma_m(g, \varepsilon) = \gamma_m(g) = -g \frac{dZ_m^{(1)}(g)}{dg}, \quad (65)$$

$$\gamma_\phi(g, \varepsilon) = \gamma_\phi(g) = -g \frac{dZ_\phi^{(1)}(g)}{dg} \quad (66)$$

が得られる．より一般に (64) で ε^{-i} の係数比較をすると漸化式

$$\begin{aligned} (\gamma_m(g) - \beta(g) \frac{d}{dg}) Z_m^{(i)}(g) &= -g \frac{d}{dg} Z_m^{(i+1)}(g) \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \\ (\gamma_\phi(g) - \beta(g) \frac{d}{dg}) Z_\phi^{(i)}(g) &= -g \frac{d}{dg} Z_\phi^{(i+1)}(g) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が導かれる．($Z_m^{(0)}(g) = Z_\phi^{(0)}(g) = 1$ とおいた．) (65), (66) はこれらで $i = 0$ の場合である．

(59), (65), (66) に得られたくりこみ群関数は mass parameter m, μ に依存せず，くりこみ定数 $Z_g(g, \varepsilon), Z_m(g, \varepsilon), Z_\phi(g, \varepsilon)$ の $\varepsilon = 0$ における留数のみから決定される． $\beta(g, \varepsilon)$ が $-\varepsilon g$ の項を含む以外は ε にも依らない．これは minimal subtraction scheme 特有の著しい性質である．

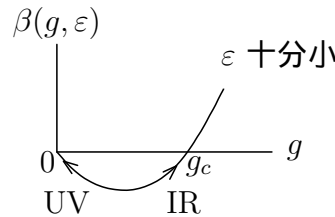
6 臨界点近傍の振舞い

6.1 固定点

固定点 g_c を

$$\beta(g_c, \varepsilon) = 0 \quad (67)$$

により定める． $d < 4$ の ϕ^4 理論では，beta 関数は後の 1,2-loop での結果から以下のような振舞いをする事が示唆される．



自明な紫外 (UV) 固定点 $g = 0$ を Gaussian，非自明な赤外 (IR) 固定点 $g = g_c$ を Wilson-Fisher 固定点とも呼ぶ．上図と (57) から

$$\begin{aligned} g &\rightarrow g_c && \text{as } \mu \rightarrow 0 \text{ (IR),} \\ g &\rightarrow 0 && \text{as } \mu \rightarrow \infty \text{ (UV)} \end{aligned} \quad (68)$$

となる．また $g_c = O(\varepsilon)$ が成り立つ．以下 g_c における微係数を

$$\omega = \beta'(g_c, \varepsilon) \quad (69)$$

とおいて，

$$\omega > 0, \quad \gamma_\phi(g_c) \neq 0, \quad \gamma_m(g_c) \neq 0 \quad (70)$$

を仮定する．2-loop までの結果では $\gamma_\phi(g_c) > 0, \gamma_m(g_c) < 0$ となっている．以下，専ら $0 < g < g_c, T > T_c$ の場合を考える．

(なお，2-loop の結果では β の大域的様相は上のグラフに右下がりのカーブをつけて $-\infty$ に向かうものとなる． ε が十分小さいと $\beta = 0$ の実根は g_c 以外にもう一つあり， $\varepsilon \gtrsim 0.397$ では実根は $g = 0$ だけになる．)

$g = 0$ では $Z_m(g, \varepsilon), Z_\phi(g, \varepsilon)$ は共に 1 であるから (61), (62) を積分すると

$$Z_m(g, \varepsilon) = \exp\left(\int_0^g \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g', \varepsilon)} dg'\right) \simeq |g - g_c|^{\gamma_m(g_c)/\omega} \quad (g \sim g_c), \quad (71)$$

$$Z_\phi(g, \varepsilon) = \exp\left(\int_0^g \frac{\gamma_\phi(g')}{\beta(g', \varepsilon)} dg'\right) \simeq |g - g_c|^{\gamma_\phi(g_c)/\omega} \quad (g \sim g_c). \quad (72)$$

が得られる．これらの積分の $g' = 0$ に特異性はない．実際， $g \rightarrow 0$ では $\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + O(g^2)$, $\gamma_m(g) = O(g)$, $\gamma_\phi(g) = O(g^2)$ となることが後に 2-loop までの計算でも確認される．beta 関数と ω の定義から

$$\mu \sim |g - g_c|^{1/\omega} \quad (g \sim g_c) \quad (73)$$

に注意しよう．紫外固定点近傍 $\mu \rightarrow \infty, g \rightarrow 0$ と併せて以上の結果をまとめると次の表のようになる．

	g	m^2	$Z_g(g, \varepsilon)$	$Z_m(g, \varepsilon)$	$Z_\phi(g, \varepsilon)$
IR ($\mu \rightarrow 0$)	g_c	$\mu^{-\gamma_m(g_c)}$	$\mu^{-\varepsilon}$	$\mu^{\gamma_m(g_c)}$	$\mu^{\gamma_\phi(g_c)}$
UV ($\mu \rightarrow \infty$)	$\mu^{-\varepsilon} (\rightarrow 0)$	m_0^2	1	1	1

表 1: 固定点近傍での振舞い (μ で書かれているものは全て \sim の意味．)

6.2 Z_ϕ と異常次元 η

2点相関関数のフーリエ成分は，長波長で

$$\tilde{G}(p) \sim p^{\eta-2} f(p\xi) \quad (|p| \ll \xi^{-1}) \quad (74)$$

というスケール則に従う． η を異常次元と呼ぶ．相関長 ξ の臨界温度での発散は臨界指数 ν を用いて $\xi \sim t^{-\nu}$, $t = (T - T_c)/T_c$ と指定される．磁化率は $\chi = \text{const} \cdot \tilde{G}(0)$ で与えられる．(74) は $y \rightarrow 0$ で $f(y) \rightarrow y^{2-\eta}$ という挙動，従って臨界点での磁化率の発散は $\chi \sim \xi^{2-\eta}$ となることを示唆する．これを臨界指数 γ の定義 $\chi \sim t^{-\gamma}$ と比較すればスケーリング関係式 $\gamma = (2 - \eta)\nu$ が従う．

(74) と波動関数のくりこみから期待される規格化

$$\tilde{G}(p) \sim \frac{Z_\phi(g, \varepsilon)}{p^2 + \xi^{-2} + o(p^2)} \quad (75)$$

を比べると臨界領域では

$$Z_\phi(g, \varepsilon) \sim \xi^{-\eta} \quad (g \sim g_c) \quad (76)$$

となることが分かる．

6.3 Callan-Symanzik 型方程式

N 点 (1 粒子既約) 頂点関数として, bare なもの $\Gamma_{\text{bare}}^{(N)}$ とくりこまれたもの $\Gamma^{(N)}$ の関係

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(N)}(p_i, m_0^2, g_0, \varepsilon) = Z_\phi^{-N/2}(g, \varepsilon) \Gamma^{(N)}(p_i, m^2, g, \mu, \varepsilon) \quad (77)$$

に着目する. ここで p_i は外線の運動量 (保存則により $N - 1$ 個ある) をまとめて表す. 左辺は μ に依らない. 一方, 右辺はあらわにも, g, m を通じて μ に依る. 従って両辺を $\log \mu$ で微分するとくりこまれた頂点関数は Callan-Symanzik 型方程式 (頂点関数に対するくりこみ群方程式)

$$\begin{aligned} \left(\mu \frac{d}{d\mu} - \frac{N}{2} \gamma_\phi(g) \right) \Gamma^{(N)}(p_i, m^2, g, \mu, \varepsilon) &= 0, \\ \mu \frac{d}{d\mu} &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m(g) m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \end{aligned} \quad (78)$$

を満たすことがわかる. ここで, $\gamma_\phi(g, \varepsilon), \gamma_m(g, \varepsilon)$ の定義 (62) と (63) を用いた. またこれらは実は ε に依らないので $\gamma_\phi(g), \gamma_m(g)$ と記した. (57), (65), (66) を参照のこと. (78) は一変数 μ の関数に対する微分方程式としては単純な 1 階変数分離型である. 以下では独立変数として μ の代わりに無次元変数 s を用いたほうが便利である. そこで mass の次元の定数 μ_1 を用意し,

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 s, \quad \hat{g}(s) = g(\mu_1 s), \quad \hat{m}(s) = m(\mu_1 s), \\ g_1 &= \hat{g}(1) = g(\mu_1), \quad m_1 = \hat{m}(1) = m(\mu_1) \end{aligned} \quad (79)$$

とおく. もちろん $g(\mu)$ は (57) を, $m(\mu)$ は (63) を満たす関数である. すると (78) の解は

$$\Gamma^{(N)}(p_i, \hat{m}(s)^2, \hat{g}(s), \mu_1 s, \varepsilon) = \exp \left(\frac{N}{2} \int_1^s \gamma_\phi(\hat{g}(s')) \frac{ds'}{s'} \right) \Gamma^{(N)}(p_i, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon) \quad (80)$$

で与えられる.

一方, N 点 (1 粒子既約) 頂点関数は $(\text{mass})^{d-N(d/2-1)}$ の次元を持つ同次関数なので, 任意の p, m, g, μ に対して自明なスケール則

$$\Gamma^{(N)}(p_i, m^2, g, \mu, \varepsilon) = \sigma^{d-N(d/2-1)} \Gamma^{(N)}\left(\frac{p}{\sigma}, \frac{m^2}{\sigma^2}, g, \frac{\mu}{\sigma}, \varepsilon\right) \quad (81)$$

に従う. $N = 2$ とし (p_i は 1 つの運動量 p となる), これと (80) を組み合わせると以下の関係式が導かれる.

$$\Gamma^{(2)}(p, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon) = s^2 \exp \left(- \int_1^s \gamma_\phi(\hat{g}(s')) \frac{ds'}{s'} \right) \Gamma^{(2)}\left(\frac{p}{s}, \frac{\hat{m}(s)^2}{s^2}, \hat{g}(s), \mu_1, \varepsilon\right). \quad (82)$$

6.4 臨界領域

(63) を積分すると

$$\hat{m}(s)^2 = m_1^2 \exp \left(- \int_1^s \gamma_m(\hat{g}(s')) \frac{ds'}{s'} \right) \quad (83)$$

となる. そこで s_* を

$$\frac{\hat{m}(s_*)}{\mu_1 s_*} \left(= \frac{m(\mu_1 s_*)}{\mu_1 s_*} \right) = 1 \quad (84)$$

により定めると，この定義は

$$\frac{m_1^2}{\mu_1^2} = \exp \left(\int_1^{s_*} (2 + \gamma_m(\hat{g}(s'))) \frac{ds'}{s'} \right) \quad (85)$$

と同値である． $\Gamma^{(2)}(p, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon)$ の臨界領域は $\frac{m_1^2}{\mu_1^2} \ll 1$, $\frac{|p|}{\mu_1} \ll 1$ である．そこでの振舞いを考察したいが，単に $\mu_1 \rightarrow \infty$ としたのでは (84) から明らかなように $s_* \sim \mu_1^{-1}$ となり，それと同値な (85) から同じ結論が得られるだけである．(右辺の $\hat{g}(s)$ は μ_1 に依ること (79) に注意．) 臨界領域において，(85) の左辺の値は臨界温度からのずれの尺度なので，定数倍の不定性を度外視して $t = (T - T_c)/T_c$ と同一視する． $m_1 = m(\mu_1)$ であったから

$$t = \frac{m(\mu_1)^2}{\mu_1^2} = \frac{m_0^2 Z_m(g(\mu_1), \varepsilon)^{-1}}{\mu_1^2}.$$

ここで bare mass m_0 を動かせば t は μ_1 とは独立な変数として機能する．その際 $g(\mu)$, $\gamma_m(g)$ はあらゆる mass パラメーター m_0, m, μ_1, \dots に依らないので， t の導入に伴った変更は必要ない． μ_1 を固定すると (85) は t と s_* の関係式

$$t = \exp \left(\int_1^{s_*} (2 + \gamma_m(\hat{g}(s'))) \frac{ds'}{s'} \right) \quad (86)$$

になる． $2 + \gamma_m(g) > 0$ と仮定すると臨界領域では $s_* \rightarrow 0$ となり， t との関係は

$$t \sim s_*^{2+\gamma_m(g_c)} \quad (\rightarrow 0) \quad (87)$$

で与えられる．ここで， $\hat{g}(0) = g(0) = g_c$ を用いた．(68) を参照のこと．

(82) で $s = s_*$ とおき， $|p|/s_*$ を一定に保ちながら $s_* \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) とする．(84) を用いると $\Gamma^{(2)}(p, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon)$ は $\Gamma^{(2)}(\frac{p}{s_*}, \mu_1^2, \hat{g}(s_*), \mu_1, \varepsilon)$ と関係づけられるが，後者は $t = 1$ に相当するので臨界領域から外れており，特異性のない穏やかな振舞いが期待される．以上のアイデアを用いて $\Gamma^{(2)}(p, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon)$ の臨界領域での振舞いを評価すると以下の様になる．

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p, m_1^2, g_1, \mu_1, \varepsilon) &\sim s_*^{2-\gamma_\phi(g_c)} \Gamma^{(2)}\left(\frac{p}{s_*}, \mu_1^2, g_c, \mu_1, \varepsilon\right) \\ &\sim \mu_1^2 s_*^{2-\gamma_\phi(g_c)} \Gamma^{(2)}\left(\frac{p}{\mu_1 s_*}, 1, g_c, 1, \varepsilon\right) \\ &\sim p^{2-\gamma_\phi(g_c)} h\left(\frac{p}{\mu_1 s_*}\right) \end{aligned} \quad (88)$$

となる．ここで $h(x) = \mu_1^{\gamma_\phi(g_c)} x^{\gamma_\phi(g_c)-2} \Gamma^{(2)}(x, 1, g_c, 1, \varepsilon)$ とおいた．これが 2 点相関関数 $\tilde{G}(p)$ (74) の逆数となることから， $s_* \sim \xi^{-1} \sim t^\nu$ とおいて

$$\nu = \frac{1}{2 + \gamma_m(g_c)}, \quad \eta = \gamma_\phi(g_c) \quad (89)$$

が得られる．また

$$|g - g_c|^{\gamma_\phi(g_c)/\omega} \stackrel{(72)}{\sim} Z_\phi(g, \varepsilon) \stackrel{(76)}{\sim} \xi^{-\eta} \stackrel{(89)}{\sim} \xi^{-\gamma_\phi(g_c)} \quad (g \sim g_c) \quad (90)$$

となるので相関長については

$$\xi \sim \mu^{-1} \sim |g - g_c|^{-1/\omega} \quad (g \sim g_c) \quad (91)$$

が成り立つ．(73) を参照のこと．

7 1-loop でのくりこみ

7.1 $\Gamma^{(2)}(p)$ のくりこみ

(12) から自己エネルギー $\Sigma(p)$ について考える．1-loop では Tadpole $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}$ のみが寄与する．その $\epsilon \rightarrow 0$ における挙動は (14) で与えられる．これを有限化するには，統計重率 $e^{-\mathcal{L}}$ の \mathcal{L} の前の符号に注意して，Lagrangian \mathcal{L} に相殺項

$$\frac{1}{2}m^2 B_1 \phi^2 \quad (B_1 = \frac{\alpha}{2\epsilon}) \quad (92)$$

を付加すればよい．これは 2 乗質量を $m^2 \rightarrow m^2(1 + B_1)$ と置き換えることに相当する．相殺項により新たな Feynman 則

$$\text{---} \times \text{---} = -\frac{m^2 \alpha}{2\epsilon}$$

が生じ，自己エネルギーへの寄与は $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}$ (14) から

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}} - \frac{m^2 \alpha}{2\epsilon} = m^2 \frac{\alpha}{2} (\psi(2) - \log \hat{m}^2 + O(\epsilon)) \quad (93)$$

に変わり， $\epsilon = 0$ での発散が除去される．その結果，1 粒子既約 2 点関数 $\Gamma^{(2)}(p)$ (12) は

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m^2 - (\Sigma(p)_{\text{tadpole}} - \frac{m^2 \alpha}{2\epsilon}) = p^2 + m^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} (\psi(2) - \log \hat{m}^2)\right) + O(g^2) \quad (94)$$

と有限化される．ここで，1-loop の結果であることを思い出して $O(g^2)$ をつけた． $\alpha = g/(4\pi)^2$ (10) に注意．(94) を Feynman 図で表すと以下ようになる．

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \times \text{---} + O(g^2)$$

7.2 $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ のくりこみ

$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ に効くのは $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}$ だけである．(35) によると，これの $\epsilon \rightarrow 0$ での発散は $-g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon}$ である．これは Lagrangian に相殺項

$$\frac{1}{4!} g \mu^{2\epsilon} C_1 \phi^4 \quad (C_1 = \frac{3\alpha}{2\epsilon}) \quad (95)$$

を付加すれば消去できる．これは結合定数を $g \rightarrow g(1 + C_1)$ と置き換えることに対応する．相殺項により新たな Feynman 則

$$\text{---} \times \text{---} = -g \mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon}$$

が生じる．その結果，0-loop と 1-loop での 1 粒子既約 4 点関数は $\epsilon \rightarrow 0$ で有限化されて

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= g\mu^{2\epsilon} + \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} + g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon} \\ &= g\mu^{2\epsilon} \left[1 - \frac{3\alpha}{2} (2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - F) \right] + O(g^3)\end{aligned}\quad (96)$$

となる．ここで 1-loop までの結果であることを思い出して $O(g^3)$ をつけた．

7.3 1-loop でのくりこみ定数

1-loop での相殺項を

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} A_1 (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 B_1 \phi^2 + \frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_1 \phi^4 \quad (97)$$

と書くと (92) , (95) により

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{\alpha}{2\epsilon} = \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad C_1 = \frac{3\alpha}{2\epsilon} = \frac{3\alpha}{\epsilon}. \quad (98)$$

くりこみ定数は (55) により

$$Z_\phi = 1, \quad Z_m = 1 + \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad Z_g = 1 + \frac{3\alpha}{\epsilon}. \quad (99)$$

くりこみ群関数は (59)–(66) により

$$\beta(g, \epsilon) = -\epsilon g + 3\alpha g, \quad \gamma_m(g) = -\alpha, \quad \gamma_\phi(g) = 0. \quad (100)$$

固定点と臨界指数は (67) , (89) により

$$\alpha_c := \frac{g_c}{(4\pi)^2} = \frac{\epsilon}{3}, \quad \nu = \frac{1}{2 - \alpha_c} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2), \quad \eta = 0 + O(\epsilon^2). \quad (101)$$

8 2-loop でのくりこみ

8.1 $\Gamma^{(2)}(p)$ のくりこみ

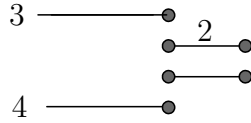
2-loop までの自己エネルギーへの寄与は以下の Feynman 図からなる．

ここで、1行目は1-loopまでの寄与(7.1節)である。2行目はDouble scoop(3.2節)とSunset(3.3節)で既に計算済みである。3行目は1-loopでのくりこみで導入した相殺項から派生するFeynman図で、Double scoopやSunsetと同様に $O(g^2)$ の寄与をする。これらはまだ計算していないのでここで求める。3行目の左図を $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times$ 、3行目の右図を $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet$ と呼ぼう。

(i) $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times$ の計算。

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times = -\frac{1}{4!}g\mu^{2\epsilon}4 \cdot 3 \cdot 2 \left(-\frac{m^2}{4\epsilon}\alpha\right) \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)^2}. \quad (102)$$

この大きな括弧の中の量は(92)に由来する $-\frac{m^2}{2}B_1$ のことである。数係数 $\boxed{4 \cdot 3 \cdot 2}$ の勘定は



による。(17)の評価を用いると

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times = m^2 \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2} (1 + \epsilon(\psi(1) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)) \quad (103)$$

が得られる。

(ii) $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet$ の計算。

これは $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}$ (13)においてcouplingを $g\mu^{2\epsilon} \rightarrow g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon}$ と置き換えたものに等しい。従って(14)から

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet = m^2 \frac{3\alpha^2}{4\epsilon^2} (1 + \epsilon(\psi(2) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)) \quad (104)$$

が得られる。結局自己エネルギーの対する2-loopの寄与は(18), (21), (103), (104)の総和をとって

$$\Sigma(p)_{\text{d-scoop}} + \Sigma(p)_{\text{sunset}} + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet = -\frac{\alpha^2}{24\epsilon} p^2 + \frac{m^2}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{2\epsilon} + O(\epsilon^0) \right) \quad (105)$$

となる。1-loopでの自己エネルギー $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}$ は相殺項(92)の付加により(93)のように $\epsilon \rightarrow 0$ での発散が除去されたが、この相殺項だけだと2-loopに至って上のように新たな発散が現れるのである。このほころびを修正するため(92)の相殺項を以下のように拡張する。

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2)(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2(B_1 + B_2)\phi^4, \quad (106)$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{\alpha^2}{24\epsilon}, \quad B_1 = \frac{\alpha}{2\epsilon}, \quad B_2 = \frac{\alpha^2}{2\epsilon^2} - \frac{\alpha^2}{4\epsilon}. \quad (107)$$

こうすれば1-loopでの1粒子既約2点関数

$$\Gamma^{(2)}(p) = (1 + A_1)p^2 + m^2(1 + B_1) - \Sigma(p)_{\text{tadpole}} + O(g^2) \quad (108)$$

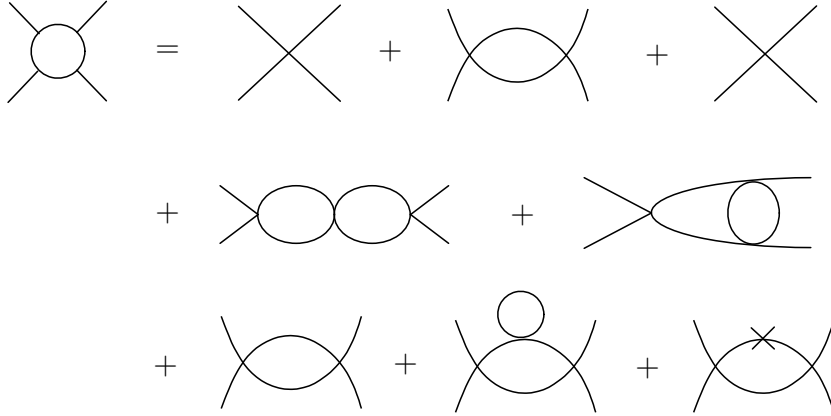
は2-loopに拡張されて

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= (1 + A_1 + A_2)p^2 + m^2(1 + B_1 + B_2) \\ &\quad - (\Sigma(p)_{\text{tadpole}} + \Sigma(p)_{\text{d-scoop}} + \Sigma(p)_{\text{sunset}} + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet) + O(g^3) \end{aligned} \quad (109)$$

となり、これらは $\epsilon \rightarrow 0$ で有限になる。

8.2 $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ のくりこみ

2-loop までの寄与は以下の Feynman 図からなる .



いずれも外線の運動量について, (38), (42) のように $(p_1, p_2, p_3, p_4), (p_1, p_3, p_2, p_4), (p_1, p_4, p_2, p_3)$ と入れ換えた寄与について和と了解する . 1 行目は 1-loop の寄与であり, 真ん中の Fish と最後の相殺項とを併せて $\epsilon \rightarrow 0$ で有限化されることは (96) で見た通りである . この処置をもって打ち止めにしたのが 1-loop のくりこみであった . 2 行目は 2-loop の寄与 Glass (4.2 節) と Lobster (4.3 節) で $\epsilon = 0$ で新たな発散を生じている . 3 行目は 1-loop のくりこみで導入した相殺項 (92) と (95) から派生する Feynman 図である . これらは 2 行目と同じく $O(g^3)$ の寄与をするので 2-loop でのくりこみ操作の対象となる . 但し, 3 行目の最後の 2 項の和は $\epsilon = 0$ において有限なので, 2-loop の相殺項を定めるだけなら考慮しなくてよい . 有限であることを確認しておこう . 3 行目の最後の 2 項の和は

$$\text{定数} \times (g\mu^{2\epsilon})^2 \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2 [(p-q)^2 + m^2]} \left\{ \Sigma(q)_{\text{tadpole}} - \frac{m^2 \alpha}{2\epsilon} \right\} \quad (p = p_1 + p_2)$$

と書ける . 1-loop くりこみの結果 (93) により, $\{ \}$ の中は $\epsilon = 2 - \omega \rightarrow 0$ で有限かつ q に依存しない . また積分は

$$\int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2 [(p-q)^2 + m^2]} = \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 + x(1-x)p^2]^{1+\epsilon}}$$

となるので確かに $\epsilon \rightarrow 0$ で有限である . なお, $\Gamma^{(2)}(p)$ の 2-loop での相殺項 ((106) の B_2 の項) の寄与は g^4 のオーダーなので $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ の 2-loop では問題にならない .

以上の考察から 2-loop で新たに生じる発散の起源は Glass と Lobster と 3 行目の第 1 項だけである . Glass と Lobster は既に求めてある . 3 行目の第 1 項を $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^\bullet$ と名づける . 7.2 節の Feynman 則から $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^\bullet$ を得るには $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}$ (35) に含まれる 4 点相互作用定数の 2 乗 $(g\mu^{2\epsilon}) \times (g\mu^{2\epsilon})$ のうちの一方だけを $g\mu^{2\epsilon} \rightarrow g\mu^{2\epsilon} \frac{3\alpha}{2\epsilon}$ と置き換えればよい . また左右の入れ換えを考慮すると全体に 2 倍がつく . こうして

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^\bullet = -g\mu^{2\epsilon} \frac{9\alpha^2}{2\epsilon^2} [1 + \epsilon (2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2 - F) + O(\epsilon^2)] \quad (110)$$

が得られる .

結局 2-loop で $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ に新たに生じる $\epsilon \rightarrow 0$ における発散は (41) , (44) , (110) の和をとって

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} + \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} + \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} \\ &= -g\mu^{2\epsilon} \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right) \end{aligned} \quad (111)$$

で与えられる $\log \hat{m}^2 - F$ に比例する極はキャンセルすることに注意 . これを除去するには Lagrangian に新たに相殺項

$$\frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_2 \phi^4 \quad \left(C_2 = \frac{9\alpha^2}{4\epsilon^2} - \frac{3\alpha^2}{2\epsilon} \right) \quad (112)$$

を追加すればよい . 1-loop での相殺項 (95) と併せると ϕ^4 項の 2-loop までの相殺項は

$$\frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} (C_1 + C_2) \phi^4 \quad (113)$$

となる . C_1 は (95) で与えられる . C_2 の項の追加により $\Gamma^{(2)}(p)$ の 2-loop くりこみの議論 (8.1 節) は影響を受けない .

8.3 2-loop でのくりこみ定数

2-loop の相殺項を

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{2\text{-loop}} = \frac{1}{2} A_2 (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 B_2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_2 \phi^4 \quad (114)$$

と書くと (107) , (112) により (定義 (9) から $\epsilon = 2\epsilon$ に注意して)

$$A_2 = -\frac{\alpha^2}{12\epsilon}, \quad B_2 = \frac{2\alpha^2}{\epsilon^2} - \frac{\alpha^2}{2\epsilon}, \quad C_2 = \frac{9\alpha^2}{\epsilon^2} - \frac{3\alpha^2}{\epsilon}. \quad (115)$$

2-loop までの相殺項は 1-loop の相殺項 (97) , (98) との和

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{1\text{-loop}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{2\text{-loop}} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 (B_1 + B_2) \phi^2 + \frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} (C_1 + C_2) \phi^4 \quad (116)$$

である . 従ってくりこみ定数は (55) に

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A_1 + A_2 = -\frac{\alpha^2}{12\epsilon}, \\ B &\rightarrow B_1 + B_2 = \frac{\alpha}{\epsilon} + \alpha^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2\epsilon} \right), \\ C &\rightarrow C_1 + C_2 = \frac{3\alpha}{\epsilon} + \alpha^2 \left(\frac{9}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

を代入して

$$Z_\phi = 1 - \frac{\alpha^2}{12\epsilon}, \quad Z_m = 1 + \frac{\alpha}{\epsilon} + \alpha^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{5}{12\epsilon} \right), \quad Z_g = 1 + \frac{3\alpha}{\epsilon} + \alpha^2 \left(\frac{9}{\epsilon^2} - \frac{17}{6\epsilon} \right) \quad (117)$$

となる．くりこみ群関数は (59)–(66) により

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \beta(g), \quad \beta(g) = g \left(3\alpha - \frac{17}{3}\alpha^2 \right), \quad (118)$$

$$\gamma_m(g) = -\alpha + \frac{5\alpha^2}{6}, \quad (119)$$

$$\gamma_\phi(g) = \frac{\alpha^2}{6}. \quad (120)$$

1-loop の結果 (100) と比べて g についての次数がひとつ上がっている．固定点は (67) により $\alpha_c := \frac{g_c}{(4\pi)^2}$ とおくと

$$3\alpha_c - \frac{17}{3}\alpha_c^2 = \varepsilon \rightarrow \alpha_c = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{17\varepsilon^2}{81} + O(\varepsilon^3). \quad (121)$$

臨界指数は (89) により

$$\nu = \frac{1}{2 - \alpha_c + 5\alpha_c^2/6} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{7\varepsilon^2}{162} + O(\varepsilon^3), \quad (122)$$

$$\eta = \frac{\alpha_c^2}{6} = \frac{\varepsilon^2}{54} + O(\varepsilon^3).$$

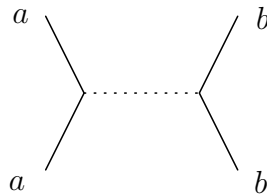
9 n 成分系

9.1 一般的注意

n 成分の場合 $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ に対して Lagrangian を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2(\vec{\phi})^2 + \frac{1}{4!}g\mu^\varepsilon \left((\vec{\phi})^2 \right)^2 \quad (123)$$

とし，汎関数積分 $\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x \mathcal{L}}$ により指定される n 成分系を考える．proper vertex の Feynman 規則は 1 成分の場合 (2 節) と殆ど同じである．違いは全ての線分に運動量だけでなく， ϕ_a の添え字 a がつくこと．これは自由場 $g = 0$ の場合の Green 関数 $\langle \phi_a(x)\phi_b(y) \rangle$ の運動量 q のフーリエ成分が $\frac{\delta_{ab}}{q^2 + m^2}$ であり， δ_{ab} を含むことによる．特に $\phi_a\phi_a\phi_b\phi_b$ という頂点には



という構造を持った図を対応させる．これにより Feynman 図の重複度が変わってくる．(a, b が重複して登場していても和を意味しないものとする．)

Proper vertex にも添え字がつく． $\Gamma^{(2)}$ の場合 (12) は $\Gamma_{ij}^{(2)}(p) = \delta_{ij}(p^2 + m^2 - \Sigma(p))$ となる．よって自己エネルギー $\Sigma(p)$ の Feynman 図の 2 本の外線は同じ添え字 $i = j$ の場合だけが問題となり，その値は $i = j$ に依らない．Tadpole (13)，Double scoop (15)，Sunset (19) は数係数

を変更したものになる．重複度は n の多項式なので，最終結果は $n = 1$ の場合に $f(n)$ をかけたものになる．ここで $f(n)$ は $f(1) = 1$ となる n の多項式である．このような n の多項式を以下では重複度多項式と呼ぼう．

$\Gamma^{(4)}$ も同様である．例えば (32) は

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} \\ &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_3, p_2, p_4)_{\text{fish}} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_4, p_2, p_3)_{\text{fish}} \end{aligned} \quad (124)$$

となり， $\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}$ が (33) で数係数を変更したもの，つまり重複度多項式倍したものになる．Glass (38)，(39)，Lobster (42)，(43) についても同様．

以上から，新しい積分の評価は必要なく，各 Feynman 図について

$$\text{重複度多項式 } f(n) = \frac{n \text{ 成分の場合の重複度}}{1 \text{ 成分の場合の重複度}}$$

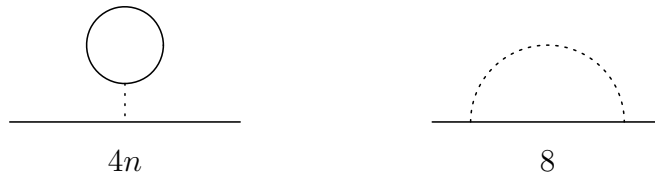
だけを求めればよい．ここで分母は以前 3，4 節 で計算した際に で囲んだ数字である．

9.2 $\Gamma^{(2)}$

1 成分系と同様に自己エネルギー $\Sigma(p)$ について考えればよい．

9.2.1 Tadpole

(13) 参照．重複度は $n = 1$ では $3 \times 4 = 12$ であった．Tadpole 相当するダイアグラムは以下の 2 種類である．



これらは点線を 1 点に縮めると Tadpole になる．これから重複度多項式は

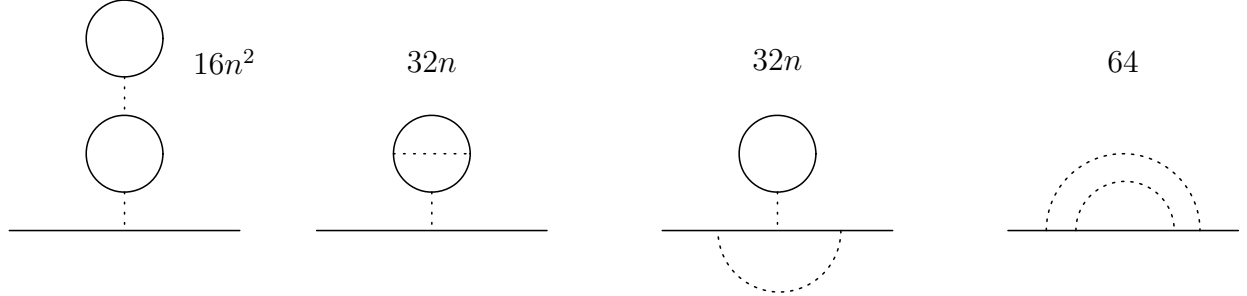
$$f(n) = \frac{4n + 8}{12} = \frac{n + 2}{3}.$$

よって (14) により

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}} = \frac{n + 2}{6} \frac{m^2 \alpha}{\epsilon} (1 + \epsilon(\psi(2) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)). \quad (125)$$

9.2.2 Double scoop

(15) 参照．重複度は $n = 1$ では $(3 \times 4)^2 = 144$ であった．Double scoop に相当するダイアグラムは以下の 4 種類．



これから重複度多項式は

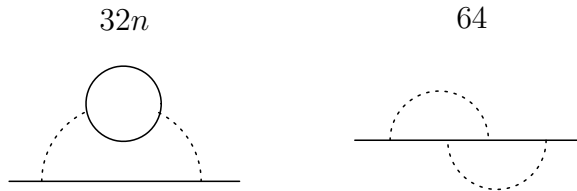
$$f(n) = \frac{16n^2 + 64n + 64}{144} = \frac{(n+2)^2}{9}.$$

よって (18) により

$$\Sigma(p)_{\text{d-scoop}} = -\frac{(n+2)^2 m^2 \alpha^2}{36 \epsilon^2} \left(1 + \epsilon(\psi(2) + \psi(1) - 2 \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2) \right). \quad (126)$$

9.2.3 Sunset

(19) 参照．重複度は $n = 1$ では $2 \times 3 \times 4^2 = 96$ であった．Sunset に相当するダイアグラムは以下の 2 種類．



これから重複度多項式は

$$f(n) = \frac{32n + 64}{96} = \frac{n+2}{3}.$$

よって (21) により

$$\Sigma(p)_{\text{sunset}} = -\frac{n+2}{18} \alpha^2 \left(\frac{3m^2}{2\epsilon^2} + \frac{3m^2}{\epsilon} \left(\frac{3}{2} + \psi(1) - \log \hat{m}^2 \right) + \frac{1}{4\epsilon} p^2 + O(\epsilon^0) \right). \quad (127)$$

9.3 $\Gamma^{(4)}$

(124) のような和を記述するため以下の量を導入しておく .

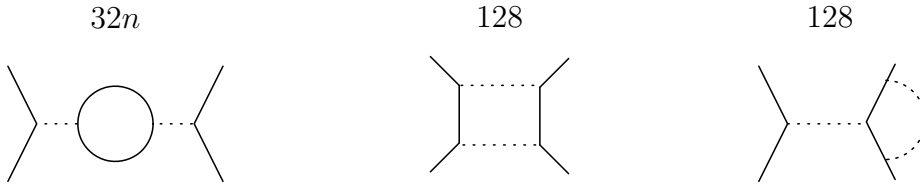
$$\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{3}(\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}), \quad (128)$$

$$\begin{aligned} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} = & \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{12}}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{12}}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{12}}} - 1} + \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{13}}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{13}}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{13}}} - 1} \\ & + \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{14}}} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{14}}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_{14}}} - 1}. \end{aligned} \quad (129)$$

ここで $p_{ab} = (p_a + p_b)^2$ である . $F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ は 1 成分系の F (36) の自然な拡張である . そういう意味では $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ は 1 成分系での 1 に相当する .

9.3.1 Fish

(33) 参照 . 重複度は $n = 1$ では $2 \times 3^2 \times 4^2 = 288$ であった . Sunset に相当するダイアグラムは以下の 3 種類 . (Amit [A] p129 Fig. 6-15 .)



これから重複度多項式は

$$f(n) = \frac{32n + 256}{288} = \frac{n + 8}{9}.$$

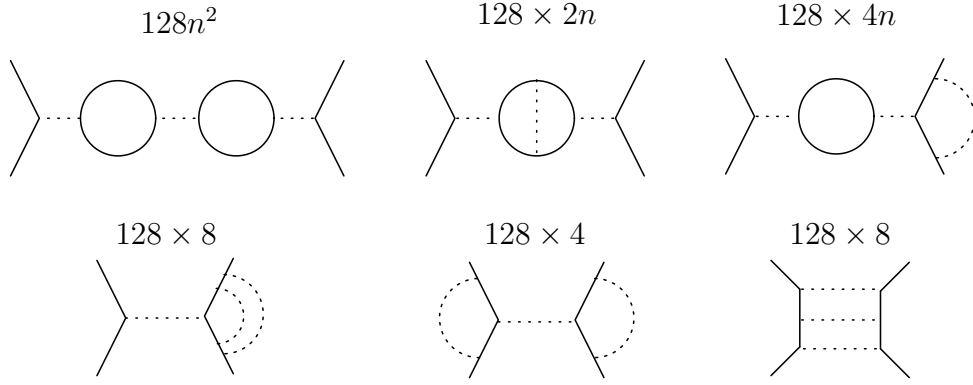
よって 1 成分系の $\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}$ (34) は $f(n)$ 倍される . それを (124) に代入して $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}, F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ の定義を用いると

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}} \\ & = -\frac{n + 8}{6} \frac{g\mu^{2\epsilon}\alpha}{\epsilon} [\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} (1 + \epsilon(2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2)) - \epsilon F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + O(\epsilon^2)]. \end{aligned} \quad (130)$$

$n = 1$ として $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow 1, F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow F$ とすると 1 成分系の結果 (35) に帰着する .

9.3.2 Glass

(39) 参照 . 重複度は $n = 1$ では $2 \times 3^3 \times 4^3 = 3456$ であった . Glass に相当するダイアグラムは以下の 6 種類 . (Amit [A] p129 Fig. 6-16 .)



これから重複度多項式は

$$f(n) = \frac{128(n^2 + 6n + 20)}{3456} = \frac{n^2 + 6n + 20}{27}.$$

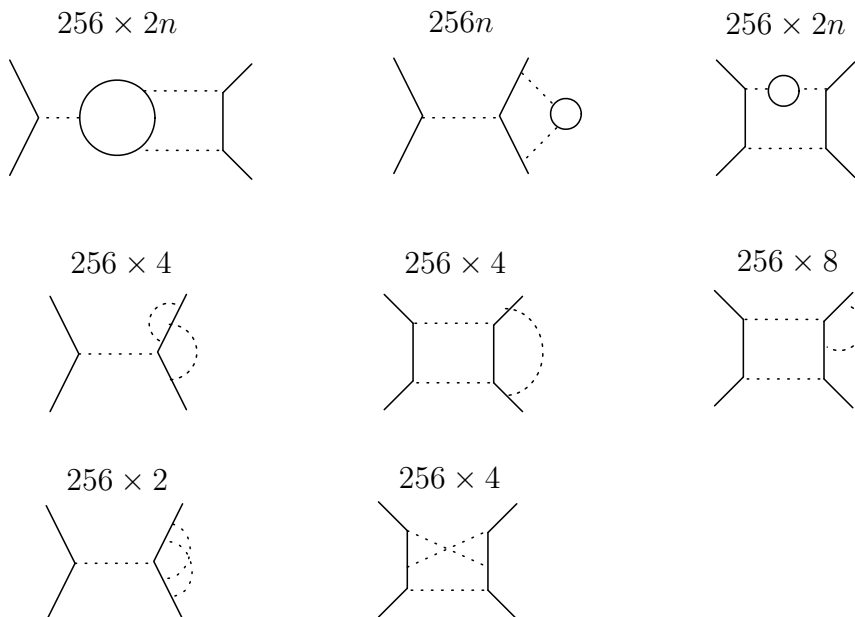
よって1成分系の $\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}}$ (40) は $f(n)$ 倍される．それを (124) (で fish \rightarrow glass としたもの) に代入して $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}, F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ の定義を用いると

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} \\ &= \frac{n^2 + 6n + 20}{36} \frac{g\mu^{2\epsilon}\alpha^2}{\epsilon^2} [\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} (1 + \epsilon(4 + 2\psi(1) - 2 \log \hat{m}^2)) - 2\epsilon F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + O(\epsilon^2)]. \end{aligned} \quad (131)$$

$n = 1$ として $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow 1, F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow F$ とすると1成分系の結果 (41) に帰着する．

9.3.3 Lobster

(43) 参照．重複度は $n = 1$ では $2 \times 3^2 \times 4^3 \times 6 = 6912$ であった．(42) の直前で述べたように，この数は左右反転したものを含まない．ここでもそのようにカウントした重複度との比をとれば重複度多項式が得られる．すると Lobster に相当するダイアグラムは以下の8種類．



最後の二つは Amit [A] p129 Fig. 6-17 に含まれていない．これから重複度多項式は

$$f(n) = \frac{256(5n+22)}{6912} = \frac{5n+22}{27}.$$

よって1成分系の $\bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}}$ (50) は $f(n)$ 倍される．それを (124) (で fish \rightarrow lobster としたもの) に代入して $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}, F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ の定義を用いると

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} \\ &= \frac{5n+22}{18} \frac{g\mu^{2\epsilon}\alpha^2}{\epsilon^2} \left[\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} (1 + \epsilon(5 + 2\psi(1) - 2\log \hat{m}^2)) - 2\epsilon F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + O(\epsilon^2) \right]. \end{aligned} \quad (132)$$

$n=1$ として $\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow 1, F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow F$ とすると1成分系の結果 (44) に帰着する．

9.4 $\Gamma^{(2)}$ と $\Gamma^{(4)}$ のくりこみ

1成分系と同様に $\Gamma^{(2)}$ のくりこみとは自己エネルギー $\Sigma(p)$ の有限化である．

9.4.1 1-loop でのくりこみ

7節の内容と並行している．まず1-loopでの自己エネルギーの発散は Tadpole (125) で与えられる．この相殺項は, (92) を重複度多項式 $\frac{n+2}{3}$ 倍すればよく,

$$\frac{1}{2} m^2 B_1 (\vec{\phi})^2 \quad \left(B_1 = \frac{(n+2)\alpha}{6\epsilon} \right) \quad (133)$$

である．これにより新たな Feynman 則

$$\text{---} \times \text{---} = -\frac{(n+2)m^2\alpha}{6\epsilon}$$

が生じる．

次に $\Gamma^{(4)}$ の発散は, 1-loop では Fish だけであり, (130) で与えられる．これは Lagrangian に相殺項

$$\frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_1 \left((\vec{\phi})^2 \right)^2 \quad \left(C_1 = \frac{(n+8)\alpha}{6\epsilon} \right) \quad (134)$$

を付加すれば消去できる．この C_1 は当然ながら1成分系での値 (95) に重複度多項式 $\frac{n+8}{9}$ をかけたものに等しく, 結合定数を $g \rightarrow g(1 + C_1)$ と置き換えることに対応する．相殺項により新たな Feynman 則

$$\text{---} \times \text{---} = -\frac{(n+8)g\mu^{2\epsilon}\alpha}{6\epsilon}$$

が生じる．以上から1-loopでの相殺項を

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} A_1 (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 B_1 (\vec{\phi})^2 + \frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_1 \left((\vec{\phi})^2 \right)^2 \quad (135)$$

と書くと

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{(n+2)\alpha}{6\epsilon} = \frac{(n+2)\alpha}{3\epsilon}, \quad C_1 = \frac{(n+8)\alpha}{6\epsilon} = \frac{(n+8)\alpha}{3\epsilon}. \quad (136)$$

くりこみ定数は (55) により

$$Z_\phi = 1, \quad Z_m = 1 + \frac{(n+2)\alpha}{3\epsilon}, \quad Z_g = 1 + \frac{(n+8)\alpha}{3\epsilon}. \quad (137)$$

くりこみ群関数 (59)–(66) は (100) に重複度多項式による補正がついて

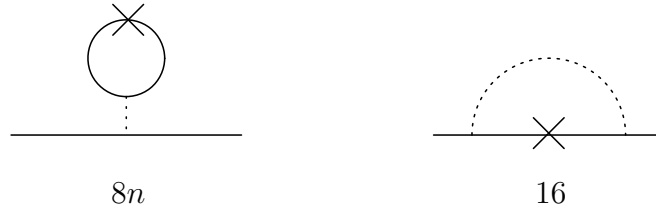
$$\beta(g, \epsilon) = -\epsilon g + \frac{(n+8)\alpha g}{3}, \quad \gamma_m(g) = -\frac{(n+2)\alpha}{3}, \quad \gamma_\phi(g) = 0. \quad (138)$$

固定点と臨界指数は (67), (89) により

$$\alpha_c := \frac{g_c}{(4\pi)^2} = \frac{3\epsilon}{n+8}, \quad \nu = \frac{1}{2 + \gamma_m(g_c)} = \frac{1}{2} + \frac{(n+2)\epsilon}{4(n+8)} + O(\epsilon^2), \quad \eta = 0 + O(\epsilon^2). \quad (139)$$

9.4.2 2-loop でのくりこみ

8節の内容と並行している．まず自己エネルギーへの寄与のうち，Double scoop (126) と Sunset (127) の計算は済んでいる．あとは 1-loop で導入した相殺項から生じる $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times$ と $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet$ を求める必要がある． $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times$ は 1 成分のとき (102) であり，その因子 $\left(-\frac{m^2}{4\epsilon}\alpha\right)$ とは $-\frac{m^2}{2}B_1$ のことであった．従って n 成分系ではこれは $\frac{n+2}{3}$ 倍される．(133) 参照のこと．さらに (102) の重複度 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ は



という勘定により $8(n+2)$ に置き換わる，つまり $\frac{n+2}{3}$ 倍される．結局 (103) は $\frac{(n+2)^2}{9}$ 倍されて

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\times = \frac{(n+2)^2 m^2 \alpha^2}{36 \epsilon^2} (1 + \epsilon(\psi(1) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)) \quad (140)$$

となる．

次に $\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet$ は (125) において，coupling $g\mu^{2\epsilon}$ を相殺項の Feynman 則により $\frac{(n+8)g\mu^{2\epsilon}\alpha}{6\epsilon}$ に置き換えたものとなる．(134) を参照のこと．(125) では coupling は α を用いて書いてあるので $\alpha \rightarrow \frac{n+8}{6\epsilon}\alpha^2$ とすればよい．従って

$$\Sigma(p)_{\text{tadpole}}^\bullet = \frac{(n+2)(n+8) m^2 \alpha^2}{36 \epsilon^2} (1 + \epsilon(\psi(2) - \log \hat{m}^2) + O(\epsilon^2)). \quad (141)$$

これは $n=1$ で (104) に帰着している．

結局自己エネルギーに対する 2-loop の寄与は (126), (127), (140), (141) の総和をとって

$$\begin{aligned} & \Sigma(p)_{\text{d-scoop}} + \Sigma(p)_{\text{sunset}} + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^{\times} + \Sigma(p)_{\text{tadpole}}^{\bullet} \\ &= -\frac{(n+2)\alpha^2}{72\epsilon} p^2 + \frac{m^2\alpha^2}{2} \left(\frac{(n+2)(n+5)}{18\epsilon^2} - \frac{n+2}{6\epsilon} + O(\epsilon^0) \right). \end{aligned} \quad (142)$$

この発散を除去するため (133) の相殺項を以下のように拡張する .

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2)(\nabla\vec{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2(B_1 + B_2)(\vec{\phi})^2, \quad (143)$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{(n+2)\alpha^2}{72\epsilon}, \quad B_1 = \frac{(n+2)\alpha}{6\epsilon}, \quad B_2 = \frac{(n+2)(n+5)\alpha^2}{36\epsilon^2} - \frac{(n+2)\alpha^2}{12\epsilon}. \quad (144)$$

以上で自己エネルギーについては処置が済んだ . 最後に $\Gamma^{(4)}$ のくりこみをする . 8.2 節と同様である . 2-loop での寄与は Glass と Lobster 以外に 1-loop での相殺項 (134) から生じる $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^{\bullet}$ がある . 8.2 節参照のこと . これは $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}$ (130) に含まれる $g\mu^{2\epsilon}\alpha$ を $\frac{(n+8)g\mu^{2\epsilon}\alpha}{6\epsilon}$ に置き換え , 全体を 2 倍すればよい . 結果は

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^{\bullet} = -\frac{(n+8)^2}{18} \frac{g\mu^{2\epsilon}\alpha^2}{\epsilon^2} [\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} (1 + \epsilon(2 + \psi(1) - \log \hat{m}^2)) - \epsilon F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + O(\epsilon^2)]. \quad (145)$$

結局 2-loop で新たに生じる発散は (131) , (132) , (145) の和をとって

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{glass}} + \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{lobster}} + \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{\text{fish}}^{\bullet} \\ &= -g\mu^{2\epsilon}\alpha^2 \Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \left(\frac{(n+8)^2}{36\epsilon^2} - \frac{5n+22}{18\epsilon} + O(\epsilon^0) \right) \end{aligned} \quad (146)$$

で与えられる . これを除去するには Lagrangian に新たに相殺項

$$\frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_2 \left((\vec{\phi})^2 \right)^2 \quad \left(C_2 = \frac{(n+8)^2\alpha^2}{36\epsilon^2} - \frac{(5n+22)\alpha^2}{18\epsilon} \right) \quad (147)$$

を追加すればよい .

最終的に 2-loop での新たな相殺項を

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}^{2\text{-loop}} = \frac{1}{2} A_2 (\nabla\vec{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 B_2 (\vec{\phi})^2 + \frac{1}{4!} g\mu^{2\epsilon} C_2 \left((\vec{\phi})^2 \right)^2 \quad (148)$$

と書くと , $\epsilon = 2\epsilon$ に注意して

$$A_2 = -\frac{(n+2)}{36\epsilon}\alpha^2, \quad B_2 = \left(\frac{(n+2)(n+5)}{9\epsilon^2} - \frac{n+2}{6\epsilon} \right)\alpha^2, \quad C_2 = \left(\frac{(n+8)^2}{9\epsilon^2} - \frac{5n+22}{9\epsilon} \right)\alpha^2. \quad (149)$$

1-loop の相殺項 (135) とあわせてくりこみ定数 (55) を求めると

$$Z_\phi = 1 - \frac{n+2}{36\epsilon}\alpha^2, \quad (150)$$

$$Z_m = 1 + \frac{n+2}{3\epsilon}\alpha + \left(\frac{(n+2)(n+5)}{9\epsilon^2} - \frac{5(n+2)}{36\epsilon} \right)\alpha^2, \quad (151)$$

$$Z_g = 1 + \frac{n+8}{3\epsilon}\alpha + \left(\frac{(n+8)^2}{9\epsilon^2} - \frac{3n+14}{6\epsilon} \right)\alpha^2. \quad (152)$$

くりこみ群関数は

$$\beta(\varepsilon, g) = -\varepsilon g + \beta(g), \quad \beta(g) = g \left(\frac{n+8}{3}\alpha - \frac{3n+14}{3}\alpha^2 \right), \quad (153)$$

$$\gamma_m(g) = -\frac{n+2}{3}\alpha + \frac{5(n+2)}{18}\alpha^2, \quad (154)$$

$$\gamma_\phi(g) = \frac{n+2}{18}\alpha^2. \quad (155)$$

固定点 $\alpha_c = \frac{g_c}{(4\pi)^2}$ は

$$\alpha_c = \frac{3\varepsilon}{n+8} + \frac{9(3n+14)\varepsilon^2}{(n+8)^3} + O(\varepsilon^3). \quad (156)$$

臨界指数は (89) により

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{(n+2)\varepsilon}{4(n+8)} + \frac{(n+2)(n^2+23n+60)\varepsilon^2}{8(n+8)^3} + O(\varepsilon^3), \quad (157)$$

$$\eta = \frac{(n+2)\varepsilon^2}{2(n+8)^2} + O(\varepsilon^3). \quad (158)$$

2007年までに minimal subtraction scheme で計算されている beta 関数は 5-loop [K] である .

$$\begin{aligned} \beta(g, \varepsilon)/g &= -\varepsilon + \frac{1}{3}(n+8)\alpha - \frac{1}{3}(3n+14)\alpha^2 \\ &+ \frac{1}{216} \left[33n^2 + 922n + 2960 + 96(5n+22)\zeta(3) \right] \alpha^3 \\ &- \frac{1}{3888} \left[-5n^3 + 6320n^2 + 80456n + 196648 \right. \\ &\quad + 96(63n^2 + 764n + 2332)\zeta(3) \\ &\quad - 288(n+8)(5n+22)\zeta(4) \\ &\quad \left. + 1920(2n^2 + 55n + 186)\zeta(5) \right] \alpha^4 \\ &+ \frac{1}{62208} \left[13n^4 + 12578n^3 + 808496n^2 + 6646336n + 13177344 \right. \\ &\quad + 16(-9n^4 + 1248n^3 + 67640n^2 + 552280n + 1314336)\zeta(3) \\ &\quad + 768(-6n^3 - 59n^2 + 446n + 3264)\zeta(3)^2 \\ &\quad - 288(63n^3 + 1388n^2 + 9532n + 21120)\zeta(4) \\ &\quad + 256(305n^3 + 7466n^2 + 66986n + 165084)\zeta(5) \\ &\quad - 9600(n+8)(2n^2 + 55n + 186)\zeta(6) \\ &\quad \left. + 112896(14n^2 + 189n + 526)\zeta(7) \right] \alpha^5 \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha = \frac{g}{(4\pi)^2}, \quad \zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s} \quad (\text{Riemann zeta 関数})$$

参考文献

- [R] P. Ramond, Field Theory, A Modern Primer, Benjamin (1981)
- [B] M. L. Bellac, Quantum and Statistical Field Theory, Oxford (1991)
- [A] D. J. Amit, Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena (revised 2nd edition), World Scientific (1984).
- [K] H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, Phys. Lett. B **272** (1991) 39. Errata **319** (1993) 545.