補遺：**微分演算子としての回転** (rotation)

ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r}))$ を考える。ここで $\mathbf{r} = (x, y, x)$ は空間座標である。簡単のため $\mathbf{r}$ 依存性は略して $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ とも書く。

$\mathbf{A}$ の回転 $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ の渦を表すベクトル場である。$\mathbf{A}$ に付随して定められるが、もちろん $\mathbf{A}$ 自身とは異なる。具体的に、xyz 座標では以下の様に与えられる。

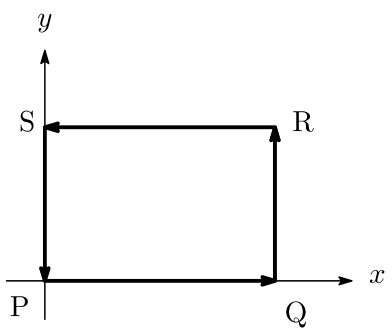
$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\mathrm{rot}\mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\mathrm{rot}\mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{1}$$

眼がチラチラする式だが、 $x \to y \to z \to x$ という風に巡回的に添字を入れ替えると、一つの式から残りの二つが導かれるという規則的なパターンを持つ。(よって例えば最初の式だけ覚えれば事足りる。) 3×3 の行列式を知っている人は、形式的に次の様に覚えても良い。(知らない人はこの注意を無視して構わない。)

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

ここで、$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれの添字の正の方向の単位ベクトルである。

(1) 式を導出しよう。最後の $(\mathrm{rot}\mathbf{A})_z$ の式を示す．他も同様である。$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_z$ は，定義から z 方向の渦から定まる．そこで，図の様に $z =$ 一点の平面上の長方形状の経路 C :P $\to$ Q $\to$ R $\to$ S $\to$ P に沿って $\mathbf{A}$ を線積分する．



ここで，長方形の中心を (x, y, z) とし，$|\mathrm{PQ}| = a$, $|\mathrm{QR}| = b$ とする．つまり各点の座標を

$$\mathrm{P} : (x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}, z), \quad \mathrm{Q} : (x + \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}, z), \quad \mathrm{R} : (x + \frac{a}{2}, y + \frac{b}{2}, z), \quad \mathrm{S} : (x - \frac{a}{2}, y + \frac{b}{2}, z)$$

とする．C に沿う渦は

$$\int_C \mathbf{A}d\mathbf{l} = \int_{\mathrm{P}\to\mathrm{Q}} \mathbf{A}d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{Q}\to\mathrm{R}} \mathbf{A}d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{R}\to\mathrm{S}} \mathbf{A}d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}} \mathbf{A}d\mathbf{l} \tag{2}$$

であるが，a, b が十分小さいときには線積分の意味に立ち返り，次の様に近似してよい．

$$\int_{\mathrm{P}\to\mathrm{Q}} \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq aA_x(x, y - \frac{b}{2}, z), \qquad \int_{\mathrm{R}\to\mathrm{S}} \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq -aA_x(x, y + \frac{b}{2}, z),$$

$$\int_{\mathrm{Q}\to\mathrm{R}} \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq bA_y(x + \frac{a}{2}y, z), \qquad \int_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}} \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq -bA_y(x - \frac{a}{2}, y, z).$$

これを (2) に代入して

$$\int_C \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq a\left(A_x(x, y - \frac{b}{2}, z) - A_x(x, y + \frac{b}{2}, z)\right) + b\left(A_y(x + \frac{a}{2}y, z) - A_y(x - \frac{a}{2}, y, z)\right). \tag{3}$$

更に，やはり a, b が小さいときの近似

$$A_x(x, y \pm \frac{b}{2}, z) \simeq A_x \pm \frac{b}{2}\frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad A_y(x \pm \frac{a}{2}, y, z) \simeq A_y \pm \frac{a}{2}\frac{\partial A_y}{\partial x}$$

を代入する． ここで右辺はいずれも位置 (x, y, z) における量であり，(x, y, z) と付記するのを略している．結局 (3) は

$$\int_C \mathbf{A}d\mathbf{l} \simeq ab\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

となる．回転は，その点の周りの単位面積当たりの渦であるから，その z 成分は

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_z = \lim_{ab\to 0} \frac{1}{ab}\int_C \mathbf{A}d\mathbf{l} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{4}$$

となり， (1) の最後の式が導かれた．なお， 近似で無視した項は極限 (4) に効かない．