電磁波と表皮効果

媒質中の電磁場は，形式的には真空中のマクスウェル方程式で ε_0, μ_0 を媒質の誘電率 ε, 透磁率 μ に置き換えた方程式に従う．このことを認めて以下の問いに答えよ．

1. 媒質は電気的に中性で電荷はないとし，その電気伝導率を σ として，$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の満たす方程式を書け.

2. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の満たす波動方程式を導け.

3. 簡単のため電磁波として z 方向に進む直線偏光の平面波を考えて

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} E\exp(i\gamma z - i\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} 0 \\ B\exp(i\gamma z - i\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

とおく．ただし，Re とは複素数の実部を意味する．E, B, γ, ω は x, y, z に依存しない定数である．これがマクスウェル方程式の解となるためにパラメータ γ, ω が満たすべき関係式を求めよ.

4. 振動数 ω が十分大きい場合と小さい場合，解 (1) はどのように振舞うか考察せよ.

解答例

1. 電荷はないので $\rho = 0$．またオームの法則により $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$ である．これをマクスウェル方程式に用いると

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{4}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \tag{5}$$

2. (4) の rot をとって恒等式 $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$ を用いると

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathrm{rot}\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

(2) と (5) を代入して

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

ただし， $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ とおいた．同様の操作で $\mathbf{B}$ についても (7) と同じ波動方程式が導かれる．

このように，媒質の効果をオームの法則によって取り入れた波動方程式には時間についての 1 次の微分が現れる．以下に見るように，この項は減衰振動における摩擦項と類似の効果をもたらす．これは電場に誘起された電流によってジュール熱が発生するためである．

3. (7) に (1) の Re の中身を代入すると

$$\left(-\gamma^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu\sigma\omega \right) E \exp(i\gamma z - i\omega t) = 0 \tag{8}$$

解が非自明であるためには $E \neq 0$ であり，これが z, t に依らずに成立するためには括弧の中が 0 でなければならない．ゆえに

$$\gamma = \pm(\gamma_1 + i\gamma_2), \tag{9}$$
$$\gamma_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}c}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1 \right)^{1/2}, \tag{10}$$
$$\gamma_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}c}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1 \right)^{1/2}. \tag{11}$$

逆に $-\gamma^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu\sigma\omega = 0$ の条件のもとで (1) は全ての方程式 (2)–(5) を満たすことが確認できる．

4.

(i) $\omega \gg \frac{\sigma}{\varepsilon}$ の場合．γ の虚部は $\gamma_2 \simeq 0$ となるので $E\exp(i\gamma z - i\omega t)$ は z について通常の正弦波のように振動的な振る舞いをし，媒質中でも波として伝わる．

(ii) $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}$ の場合．γ の実部も虚部もほぼ同じ値

$$\gamma_1 \simeq \gamma_2 \simeq \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}$$

を持つ．従って，z 方向におよそ $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$ 進むと振幅は $1/e$ になる．

δ を表皮効果の厚さ (penetration depth または skin depth) という．この値が小さく，電磁波が媒質の中に入り込めない現象を表皮効果 (skin effect) と呼ぶ．表皮効果は媒質の特性 σ, μ だけでなく，入射する電磁波の振動数 ω に依る．

典型的な数値は絶縁体 (誘電体) の場合，

$$\sigma \simeq 10^{-12}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}, \quad \varepsilon \simeq 10^{-11} \sim 10^{-10}\,\mathrm{Fm}^{-2}$$

なので，高周波に対しては $\omega \gg \frac{\sigma}{\varepsilon}$ が容易に成立する．一方通常の金属では，ε は ε_0 とさほど変わらないが，伝導率が $\sigma \simeq 10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ と極端に (絶縁体に比べておよそ 20 桁) 大きくなるので，可視光程度の振動数 $\omega \simeq 5 \times 10^{14}\mathrm{Hz}$ ではまだ $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}$ が成立し，光はほとんど金属内に進入できない．