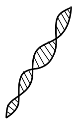
力学
てこの原理からハミルトンの原理まで [1]

国場敦夫 (東京大学大学院総合文化研究科)

1　はじめに

大学で初めて力学を受講したとき，先生が最初に「力学とは」と板書されたのをよく覚えている．ほどなく教室の中央右側の辺りから「エーテル仮説」に関する質問が飛び出したと思いきや，先生がよどみなく答えられ，刺激に満ちた半年間の授業の幕開けとなった．最終回は 1980 年 9 月 1 日 (月),「力学の原理」という表題であった．仮想仕事の原理から始まり，当時のノートは以下の様に完結している．

$t = T$



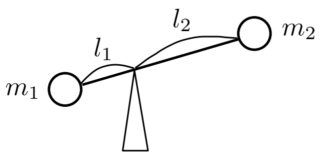
$$\Delta \underbrace{\int_0^T L(q_a, \dot{q}_a)dt}_{\text{作用}} = 0 \quad \text{ハミルトンの原理}$$

$t = 0$

同先生が監修されている本特集号で執筆の機会をいただいた主題は，これらの図，式，概念に他ならず，ほぼ 30 年を経て再び学期末試験の答案を読んでいただけるような御縁に感謝している．実際，本稿 5 章の例題は，同年 9 月 26 日 (金) に実施された期末試験の問 3 を一部改変・拝借し，解答を試みたものである．

2　てこの原理

図のように，軽い棒の両端に質量 m_1, m_2 のおもりを取り付けて 1 点 (支点) で支える．



つりあいの条件は

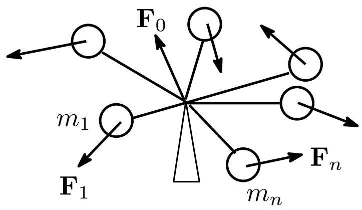
$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

[1]数理科学 「原理は美しい-自然は調和している-」 2009 年 12 月号 pp.7-13 (サイエンス社) 掲載記事．出版社の了承を得て公開．

であり，二つの質点の重心が支点に一致することを意味する．

てこの原理は静力学の基本問題の最も簡単な例である．静力学では，物体，あるいは拘束された質点系のつりあい，つまり静止した初期条件が維持される条件，あるいはそのような配置，平衡点を求めることが主題となる．

少し一般化して，質量 $m_1, \ldots, m_n$ のおもりからなる系を考えよう．これらは軽い棒により相対位置が固定され，支点で支えられている．



おもりの位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ とし，働く力を重力に限らず一般に $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ とする．相対位置の固定された質点系は剛体と等価であり，自由度は 6 である．つりあいの条件は，

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

となる．ここで， $\mathbf{r}_0$ は支点の位置ベクトル，$\mathbf{F}_0$ は質点系が支点において受ける力である．$\times$ はベクトル積を表す．

第 1 の条件により，質点系に働く合力は 0 であり，全運動量は一定となる．第 2 の条件により，質点系に働く力のモーメントの総和は 0 であり，全角運動量も一定となる．従って，静止した初期条件ではこれらはともに 0 のままであり，並進も回転もせず，つりあいが保たれる．

合力が 0 なので，第 2 の条件は位置ベクトルの原点を何処にとっても変わらない．そこで，支点を原点にとれば $\mathbf{r}_0 = 0$ であり，$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ に帰する．ここで，一様な重力の場合に立ち戻り， $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$ とおくと ($\mathbf{g}$ は鉛直下向き)

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} \tag{1}$$

により，質点系の重心の位置ベクトルが $\mathbf{g}$ と平行になるべきことが導かれる．そのような状況は一般に二つあり，重心が支点の真下にあれば安定平衡点，真上にあれば不安定平衡点である．はじめに述べたてこの原理は，$n = 2$ で支点と重心が一致する場合に相当する．

3 仮想仕事の原理

前節で求めたつりあいの条件，支点と重心が鉛直に並ぶべきこと，は正しいが，導出には注意が要る．各質点には重力 $m_i \mathbf{g}$ 以外にも棒からの拘束力

(force of constraint) が働いている．これを $\mathbf{F}_i^{(c)}$ と書くと，合力は $m_i\mathbf{g}+\mathbf{F}_i^{(c)}$ である．拘束力 $\mathbf{F}_i^{(c)}$ は一般には質点系の配位に依存しうる厄介な力である．つりあいの条件 $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ の $\mathbf{F}_i$ を前節では $m_i\mathbf{g}$ ととり，拘束力の寄与は考慮しなかった．これは大丈夫だろうか．

結論からいえば OK で，拘束力はまさにその寄与が消えるように常に「調整しあう」様になっている力なのである．実際，今の例では質点系を剛体と見なすことが出来，拘束力はその内力となるので力のモーメントの総和には寄与しない．

この様な事情をより一般的な n 質点系で定式化しよう．質点 i の位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ に拘束条件

$$f_j(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)=0, \quad j=1,\ldots,k \tag{2}$$

が課されているとする [2]．質点 i に働く力を $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i^{(a)}+\mathbf{F}_i^{(c)}$ とおく．ここで，$\mathbf{F}_i^{(a)}$ は重力の様に「与えられた力 (applied force)」であり，$\mathbf{F}_i^{(c)}$ は拘束条件を保つべく「自発的に生じる」拘束力である．つりあいの条件は $\mathbf{F}_i=0$ であり，これは任意の無限小変位 $\delta\mathbf{r}_i$ に対して

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^{(a)}+\mathbf{F}_i^{(c)})\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{3}$$

と等価である．実際には無限小変位 $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ は拘束条件と整合するものだけが問題となる．その様な $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ に対して，拘束力は $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(c)}\cdot\delta\mathbf{r}_i=0$ を満たすものであると仮定しよう．拘束条件と整合する $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ は「超曲面」(2) の「接平面」内にあるので，これは拘束力 $\{\mathbf{F}_i^{(c)}\}$ が超曲面の法線方向を向いていること，拘束は滑らかであることを意味しており，自然である．以上の仮定の下に (3) は

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{4}$$

に帰着する．拘束力を消去したつりあいの条件 (4) を仮想仕事の原理と呼ぶ．拘束条件と整合する任意の仮想的な無限小変位 $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ に対し，与えられた力 $\{\mathbf{F}_i^{(a)}\}$ のする仕事が 0 となる要請から平衡点が定まるという主張である．一般に (4) で $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ の取り方の自由度は $3n-k$ 次元あり，k 個の関係式 (2) と併せて $3n$ 次元空間の平衡点 $(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)$ が決まる．

前節の例では，拘束条件は支点が原点に固定され，質点間の相対位置が一定となることであった．これを満たす変位は支点の周りの任意の回転であり，無限小回転角を $\delta\theta$，回転軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ すると $\delta\mathbf{r}_i=\delta\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i)$

[2] ホロノミックな拘束条件という．より一般に動力学を扱う際には $f_j(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n,t)=0$ のように時間 t に陽に依存していてもよい．

である．これと $\mathbf{F}_i^{(a)} = m_i\mathbf{g}$ を (4) に代入すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{g}\cdot\delta\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i) = \delta\theta\mathbf{g}\cdot\left(\mathbf{n}\times\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right) \\
&= \delta\theta\,\mathbf{n}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right)\times\mathbf{g}\right]
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ を用いた．$\mathbf{n}$ は任意の単位ベクトルなので (1) を再現する．

4 ラグランジュの方程式

動力学に進もう．ニュートン (Newton) の運動方程式は

$$
m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(c)} \tag{5}
$$

であり，拘束系では静力学のときと同様に二つの困難に遭遇する．第一は，拘束力 $\mathbf{F}_i^{(c)}$ が介入してくることで，これは質点系の運動に依存し，先験的には決められない．第二に，位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ は拘束条件 (2) のために，独立な変数でない．

ホロノミックな拘束の場合，これらは以下のようにクリアできる．まず第一の問題には仮想仕事の原理のアイデアが使える．すなわち，拘束条件と整合する任意の $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ に対して，$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{(c)}\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$ という自然な仮定のもとで，(5) は

$$
\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i \tag{6}
$$

に帰着し，$\mathbf{F}_i^{(c)}$ は消去される．これをダランベール (D'Alembert) の原理という [3]．第二の問題は，原理的には拘束条件 (2) を自動的に満たすような $d = 3n - k$ 個の独立変数 $q_1, \ldots, q_d$ を導入すればよい．

$$
\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_d, t) \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}
$$

ここで，脚注 1) で述べた場合も想定して時間に陽に依存する可能性も含めた．このように系の配位を一義的に表すことのできる独立変数の組 $\{q_1, \ldots, q_d\}$ を一般化座標，d を自由度という．$q_j = q_j(t)$ は長さの次元を持つ必要はない．例えば半径が ae^{bt} のように変化する球面上に拘束された質点では

$$
\mathbf{r} = (ae^{bt}\sin\theta\cos\phi, ae^{bt}\sin\theta\sin\phi, ae^{bt}\cos\theta)
$$

[3] $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$ と表記して，慣性力 $-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ により「動力学を静力学に帰着する原理」と言及されることが多いが，より本質的なのは拘束力の消去である．

とおき，θ, ϕ を q_1, q_2 とみなすことが出来る．

一般化座標の真の有効性は，それが従うべき運動方程式が普遍的に定式化されることにある．それを見るために，表示 (7) をダランベールの原理 (6) に代入してみよう．まず準備として，拘束条件を満たす仮想変位 $\delta\mathbf{r}_i$ は q_j 達の自由な仮想変位 δq_j により実現されるので，(7) から

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

となることに注意する．また，時間微分については

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad \therefore\ \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

という関係式が成り立つ．これらを用いると (6) の左辺は次の様に変形される．

$$\begin{aligned}
&\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_i m_i\frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt}\cdot\sum_j\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\\
&= \sum_i m_i\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j\\
&= \sum_i m_i\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j\\
&= \sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}\right)\delta q_j, \quad K = \sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2.
\end{aligned}$$

K は系の運動エネルギーである．(6) の右辺は

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j}\mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j Q_j\delta q_j$$

と表せる．ここで一般化力

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{8}$$

を導入した．Q_j は力の次元を持つとは限らないが $Q_j\delta q_j$ は常にエネルギーの次元を持つ．仮想変位 δq_j は任意なので，以上から

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \ldots, d \tag{9}$$

が従う．特に，力 $\mathbf{F}_i^{(a)}$ がポテンシャル $U = U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t)$ を用いて $\mathbf{F}_i^{(a)} = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}_i}$ と与えられる場合を考えよう．(8) により一般化力は

$$Q_j = -\sum_i\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{10}$$

となる．最後の U は，(7) により一般化座標と時間の関数 $U = U(q_1, \dots, q_d, t)$ と了解する．$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$ に注意すると (9) と (10) から

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, d \tag{11}$$

が導かれる．ここで L は一般化座標 $q_1, \dots, q_d$ とその時間微分 $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d$ および時刻 t の関数で，

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) = K - U$$

により定義される．L をラグランジアン，(11) をラグランジュ (Lagrange) 方程式という．

特に拘束が無く，ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ による保存力の下に運動する質量 m の質点の場合，$\mathbf{r}$ の 3 成分を q_1, q_2, q_3 と見なせば自由度は $d = 3$ であり，ラグランジアンは $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$ となる．ラグランジュ方程式 (11) は $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ となり，ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ を再現する．

$K + U$ ならば系の全エネルギーであるのに何故 $K - U$ という組合せなのか，残念ながら単純な説明は無い．ともあれホロノミックな力学系の性質は，ラグランジアンという関数に集約される．一旦ラグランジアンが与えられると，系の運動を記述するに過不足のない方程式系が機能する [4]．それがラグランジュ方程式 (11) であり，任意の一般化座標で通用する．そこでは力の役割は後退しており，エネルギー K, U が主役となる．

ラグランジュがこの定式化を達成した著書「解析力学」(1788) および，ラプラス (Laplace) が太陽系の安定性を "証明" した「天体力学」(1799)[5] は，古典力学の完成を画する 18 世紀の古典である．ニュートンの「プリンキピア」(1687) からほぼ 100 年を擁した数学的洗練と共に，イギリスから大陸への学問的風土のうつろいをも感じさせる記念碑といえよう．

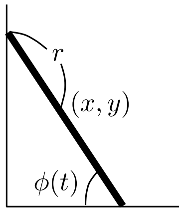
なお，ラグランジアンの取り方には任意性があり，例えば任意の関数 $F = F(q_1, \dots, q_d, t)$ に対して $L \to L + \frac{dF}{dt}$ と変更してもラグランジュ方程式は不変であることを注意しておく．

5 例題

長さ l，質量 m の一様な細い棒が図のように滑らかな壁と床に立てかけられている．重力の作用のもとで棒の運動方程式を求めよう．

[4] このような事情は力学に限らない．例えば熱力学でも，系の熱的性質は「完全な熱力学関数」に集約され，そこから全ての状態方程式が従うという類似の構造がある．

[5] 献本されたナポレオンが「宇宙の創造主たる神について一言も触れられていないではないか」と指摘すると，「私にそのような仮説は必要ありません」と切り返したという逸話はよく引用される．力学と神学が不分離の時代があった．



棒の上端から距離 r の点の座標は $x=r\cos\phi,\ y=(l-r)\sin\phi$ であり，r と $r+dr$ の間の部分の質量は $\frac{mdr}{l}$ なので, その運動エネルギー $K_r dr$，位置エネルギー $U_r dr$，棒のラグランジアン L は

$$K_r dr = \frac{mdr}{2l}(\dot{x}^2+\dot{y}^2), \quad U_r dr = \frac{mdr}{l} gy,$$
$$L = \int_0^l (K_r - U_r) dr = \frac{ml^2}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{mlg}{2}\sin\phi$$

と与えられる．自由度は $d=1$ であり，ϕ を一般化座標 q_1 として，ラグランジュ方程式 (11) は

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\cos\phi \qquad (g \text{ は重力加速度})$$

となる．壁や床からの抗力は，棒がそれに沿って滑るという拘束条件によって取り入れられたことに注意されたい．$\phi(t)=\phi_0+\Delta\phi(t)$ とおき，$\Delta\phi(t)$ について線形近似すると

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} = \omega^2(\Delta\phi - \cot\phi_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}\sin\phi_0}.$$

例えば初期条件 $\Delta\phi(0)=0, \Delta\dot{\phi}(0)=0$ を満たす解は $\Delta\phi(t) = -2\cot\phi_0 \sinh^2\frac{\omega t}{2}$ となり，線形近似が妥当な範囲では $\phi_0-\phi(t)$ は指数関数的に増大することがわかる．一方棒が床に着く瞬間の角速度は $\dot{\phi}=-\sqrt{2}\omega$ である．

6 ハミルトンの原理

ラグランジュ方程式 (11) は，ある汎関数の停留条件になっている．このことを説明しよう．まず汎関数とは何か．数が与えられると数を返すのが関数だという言い方をするなら，汎関数は関数を与えられて数を返す．ラグランジアンの積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)\, dt \tag{12}$$

を考えよう． 時刻 t_1, t_2 は固定しておく．本来 $(q_1(t),\ldots,q_d(t))$ はラグランジュ方程式と初期条件から決定されるべき関数であるが，一旦それを忘れて発想を逆転する．すなわち，関数 $q_j(t)$ 達を勝手に与えるごとに，積分 (12)

はある数を返すので，$q_j(t)$ 達の汎関数 $I[q_1,\ldots,q_d]$ と見なせる．I を作用積分という．さて，本来力学的に実現するか否かを問題にせず，いろいろな軌道 $(q_1(t),\ldots,q_d(t))$ を考えたとき，付随する作用積分 I が停留値 (極値) をとる条件を見出そう．ある軌道 $(q_j(t))$ と無限小だけずれた軌道 $(q_j(t)+\delta q_j(t))$ での作用積分が等しくなること，つまり変分 $\delta I = I[q_j+\delta q_j]-I[q_j]$ が 0 となる条件である．ただし，軌道の始点と終点は固定して考える．すなわち $\delta q_j(t_1)=\delta q_j(t_2)=0$ とする．変分条件

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_j,\dot{q}_j,t)\,dt=0 \tag{13}$$

の左辺は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\left[L(q_j+\delta q_j,\dot{q}_j+\delta\dot{q}_j,t)-L(q_j,\dot{q}_j,t)\right]dt\\&\quad=\sum_j\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)dt.\end{aligned}$$

$\delta\dot{q}_j=\frac{d(\delta q_j)}{dt}$ に注意して部分積分すると

$$\sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2}+\sum_j\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j\,dt.$$

$\delta q_j(t_1)=\delta q_j(t_2)=0$ により第 1 項は 0 である．第 2 項が任意の無限小変分 δq_j について 0 となる条件はラグランジュ方程式 (11) に他ならない [6]．

以上の結果は次の様に要約される．始点と終点が指定されたとき，仮想的な軌道 $(q_1(t),\ldots,q_d(t))$ のなかで，実際に力学的に実現されるのは，作用積分 (12) が極値をとるものである．これを作用原理 [7]，変分原理，あるいはハミルトン (Hamilton) の原理という．実はこのような力学法則の変分法による定式化はオイラー (Euler) の著作「方法」(1744) に魁があり，(11) はオイラー・ラグランジュ方程式とも呼ばれる．そもそも汎関数の停留点とは，変数の取り方に依らない概念である [8]．従ってハミルトンの原理を第 1 原理に据えるならば，オイラー・ラグランジュ方程式 (11) が任意の一般化座標で通用する運動方程式であることは自然な帰結となる．

運動を決定するという問題へのアプローチとして，ニュートンの運動方程式とハミルトンの原理はとても対照的である．前者は，力から加速度を知り，初期条件からの速度，位置の変化を刻々と積み上げげて (積分して) 追跡しようとする局所的なアプローチである．一方後者は，全ての軌道を見わたし，作用積分の値の比較から真の軌道を見つけ出そうとする大域的な視点に立つ．

[6] 先に述べたラグランジアンの不定性 $L\to L+\frac{dF}{dt}$ は，$\delta q_j(t_1)=\delta q_j(t_2)=0$ により，この結論に影響しない．

[7] 「最小作用の原理」とも呼ばれるが，実際には最小とは限らない．例えば文献 [4] の 3-2 節を参照のこと．

[8] 変数変換自体には非自明な停留点が入り込まない状況を想定する．

7　モーペルテュイの原理

時間依存性は度外視し，質点の軌跡だけを求める問題に限定すると，ハミルトンの原理は著しく簡易化する．簡単のため，ラグランジアンが時間を陽に含まず，全エネルギー $E = K + U$ が保存される質点を考えよう．ラグランジアンは $L = K - U = 2K - E$ であることに注意すると，ハミルトンの原理 (13) は $\delta\int K dt = 0$ に帰着する．時間依存性を度外視するので dt を消去したいが，それには軌跡上の線素 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ との関係

$$\frac{dl}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{2}{m}K}$$

を用いればよい．こうして簡易化されたハミルトンの原理は $\delta\int \sqrt{K} dl = 0$，すなわち

$$\delta \int \sqrt{E - U(\mathbf{r})}\, dl = 0 \tag{14}$$

と表されることが分かる．これをモーペルテュイ (Maupertuis) の原理，またはヤコビ (Jacobi) の原理という．

(14) は，位置 $\mathbf{r}$ における「速さ」が $\frac{1}{\sqrt{E-U(\mathbf{r})}} \propto \frac{1}{|\mathbf{v}|}$ で与えられる波に対するフェルマー (Fermat) の原理 (本号「光学」参照) と形式的に同じ形をしており，量子論での物質波という考え方のヒントになった．

変分 (14) を実行すると

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{-\delta\mathbf{r}}{2\sqrt{E-U}} dl + \sqrt{E-U}\frac{d\mathbf{r}}{dl} d(\delta\mathbf{r}) \right) = 0$$

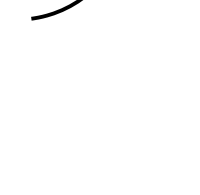
となる．第 2 項では $(dl)^2 = (d\mathbf{r})^2$ により $dl\delta(dl) = d\mathbf{r}d(\delta\mathbf{r})$ であることを用いた．この項を部分積分して被積分関数の $\delta\mathbf{r}$ の係数を 0 とおくと，軌跡の方程式

$$2\sqrt{E-U}\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \tag{15}$$

が得られる．力 $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ と軌跡の接線方向の単位ベクトル $\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$ を導入すると，(15) は

$$2(E-U)\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} \tag{16}$$

となる．一般に，軌跡の局所的な曲率半径を R とし，$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{n}}{R}$ とおくと，$\mathbf{n}$ は $\mathbf{e}$ に垂直な単位ベクトル (主法線ベクトル) となる．



$\mathbf{F}$ の主法線成分を $F_n\mathbf{n}$ とし，$E - U = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2$ を代入すると (16) は

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{R} = F_n$$

となり，曲線運動における法線加速度の関係式を再現する．

8 結語

運動学としての力学は，ホロノミックな場合には，ハミルトンの原理に集約される．一方ラグランジアン自体を定めること，すなわち自然界に働く力，あるいはエネルギーが如何なる形をとるかという問いは，本来力学の外に向けられるべきものである [9]．力学自体は，ラグランジアンの選択に物理的な自然さ，整合性を要請するに留まる．そのような要請のなかで，各論に依らず，最も基本的で重要なものは，互いに等速直線運動する座標系では全ての力学法則は同一であるという原理，ガリレイ (Galilei) の相対性原理であり，(非相対論的) 古典力学全体を貫く指導原理と位置づけられる．

指導原理と整合する作用積分を設定し，作用原理に基づいて理論を展開するという構図は，現代物理学の多くの基礎理論の標準的スタイルになっている．

参考文献

[1] H. Goldstein, *Classical mechanics,* 2nd ed. Addison-Wesley (1980).

[2] ランダウ・リフシッツ, 「力学」, 東京図書 (1974).

[3] 山本義隆,「重力と力学的世界，古典としての古典力学」，現代数学社 (1981).

[4] 江沢洋,「解析力学」，培風館 (2007)

[9] 熱力学でも完全な熱力学関数を定めること自体は一般にその守備範囲になく，測定に基づく現象論や統計力学に拠る．