物理数学 期末試験問題 平成 19 年 2 月 教官 国場敦夫

[1] 以下の問いに答えよ．必要ならば次の等式を用いよ．

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad (p>0,q>0)$$

(1) 積分 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}dx$ を変数変換 $x^2=t$ により評価し，ガンマ関数で表示せよ．同様に変数変換 $(x+1)/2=t$ によりガンマ関数で表示せよ．両者を比較して得られるガンマ関数の恒等式を導出せよ．

(2) 積分 $I_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ をガンマ関数により表示せよ．但し $n>0$.

(3)$\Gamma(\frac{1}{4})$ と $\Gamma(\frac{3}{4})$ を I_4 を用いて表示せよ．

[2] Laguerre 陪多項式は

$$L_n^k(x)=\frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+k}\right)\quad (n,k\ge 0)$$

で定義される．(授業でやったものと規格化と添え字の規約が異なる．)

(1) $L_2^3(x)$ と $L_3^2(x)$ を x の冪の和に展開した形に書き下しなさい．

(2) $\int_0^\infty L_n^k(x)L_m^k(x)x^k e^{-x}dx$ を求めよ．

(3) 指数関数の Laguerre 多項式による展開 $e^{-ax}=\sum_{n=0}^\infty c_n L_n^0(x)$ に現れる係数 c_n を求めよ $(a>0)$.

(4)

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}^0(x)$$

を証明せよ．

[3] 2 階線形微分方程式

$$3z^2(1+z)\frac{d^2y}{dz^2}-z(1+6z)\frac{dy}{dz}+y=0$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 原点および無限遠点はそれぞれ正則点か、確定特異点か、不確定特異点か.

(2) $z=0$ における級数解の最低べきの項が z^λ であるとして、指数 λ の値を求めよ．

(3) (2) の λ の各値について、対応する級数解を求めよ．一般項が求められない場合は最初の 3 項を与えよ．必要であれば記号 $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ を用いて表示してよい．

[4] 授業や内容について自由な意見、感想。(批判も歓迎、何を書いても書かなくても評点に関係なし）解答例は近日中に http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~kuniba/atsuo/lecture.html に upload の予定.

略解

[1]

(1) $x^2 = t$ とおくと $\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})/\Gamma(z+\frac{1}{2})$.

$(x+1)/2 = t$ とおくと $2^{2z-1}\Gamma(z)^2/\Gamma(2z)$.

比較して 「倍角公式」$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})/\sqrt{\pi}$ を得る．

(2)

$$I_n = \Gamma(1+\frac{1}{n})\Gamma(\frac{1}{2})/\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})$$

(3) I_4 を (2) で評価し，$\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \pi/\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\pi$ と組み合わせれば

$$\Gamma(\frac{1}{4}) = 2^{5/4}\pi^{1/4}I_4^{1/2}, \quad \Gamma(\frac{3}{4}) = 2^{-3/4}\pi^{3/4}I_4^{-1/2}$$

[2] (1) $L_2^3(x) = (x^2-10x+20)/2$, $L_3^2(x) = (-x^3+15x^2-60x+60)/6$.

(2) $\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{n,m}$

(3) (2) の直交性を用いればよい．

$$c_n = \int_0^\infty e^{-ax}L_n^0(x)e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-ax}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}.$$

母関数の式 $\exp(-xt/(1-t)) = (1-t)\sum_{n=0}^\infty L_n^0(x)t^n$ を $t = a/(1+a)$ と特殊化してもよい．

(4) いろいろなやり方がありえる．たとえば k を固定して，L_n^k は区間 $[0,\infty]$ で重み $e^{-x}x^k$ について $1, x, x^2, \ldots$ をシュミットの直交化したものとして特徴付けられることを用いる．$\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}^0(x)$ も同じ特徴づけを満たすことは容易に示せる．あとは規格化（例えば最高次の係数）の一致をみればよい．

[3] (1) $z=0$ は確定特異点．$z=\infty$ も確定特異点.

(2) $y(z) = z^\lambda\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ を代入すると

$$(3\lambda+3n-1)(\lambda+n-1)a_n = -3(\lambda+n-1)(\lambda+n-4)a_{n-1} \quad (n\geq 0)$$

但し $n=0$ では右辺は 0 と解釈する．$n=0$ のとき $(3\lambda-1)(\lambda-1)a_0 = 0$. よって $\lambda = 1$ または $\lambda = 1/3$.

(3) $n \geq 1$ では上の漸化式で共通因子 $(\lambda+n-1)$ は 0 にならないので取り除いてよい．漸化式をそれぞれの λ の値に場合に解いて

$$\lambda = 1: \ y = z\bigl(1+\frac{6}{5}z+\frac{9}{20}z^2\bigr) \quad (\text{多項式解})$$
$$\lambda = \frac{1}{3}: \ y = z^{1/3}\sum_{n\geq 0}\frac{(-8/3)_n}{n!}(-z)^n = z^{1/3}\bigl(1+\frac{8}{3}z+\frac{20}{9}z^2+\cdots\bigr)$$

を得る．