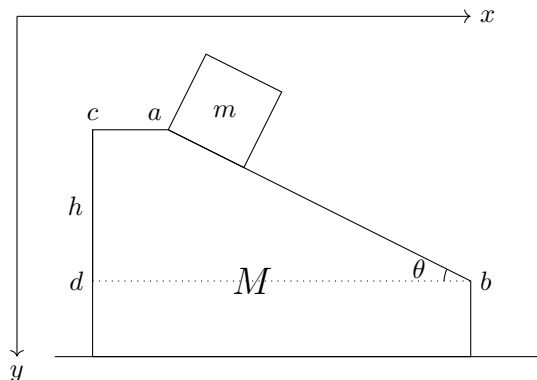


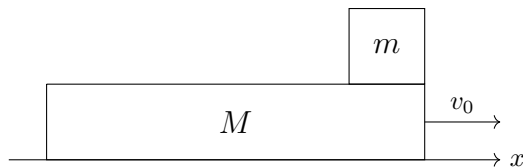
以下では物体 m の質量は m 、物体 M の質量は M とする。

[3] 図のように斜面 ab を持つ物体 M があり、その角度を θ とする。 b に対する a の高さを h とする。斜面には物体 m がのっている。この 2 物体間と床と物体 M 間に摩擦はないものとする。



- (i) 物体 m と物体 M の運動方程式を書きなさい。
- (ii) 物体 m が a から b に到達するまでにかかる時間を計算せよ。ただし物体 m の大きさは無視する。

[4] 図のように物体 M とその上に物体 m がある。2 物体間の動摩擦係数を μ とする。床と物体 M の間には摩擦力は働かないものとする。下にある物体 M に大きさ $v_0 > 0$ の初速度を与えた。以下では動摩擦のみを考える。



- (i) 物体 m と物体 M の運動方程式を書きなさい。
- (ii) 上にある物体 m が台座の物体 M からはみ出さずに一体になるためには 2 つの物体の横方向の長さの差はどれだけあればよいか。

解答例

[3]

(i) 物体 m に働く力は重力 mg と物体 M から働く垂直抗力である。また物体 M に働く力は重力 Mg と物体 m と床から働く垂直抗力である。2 物体間に働く垂直抗力を N 、床と物体 M の間に働く垂直抗力を N' と置くとこれらの運動方程式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} m_x : ma_x &= N \sin \theta \\ m_y : ma_y &= mg - N \cos \theta \\ M_x : MA_x &= -N \sin \theta \\ M_y : MA_y &= Mg + N \cos \theta - N' = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

この連立方程式は未知数 $a_x, a_y, A_x, A_y, N, N'$ の 6 つに対して方程式が 5 つしかない。この系の運動を決めるのに必要な最後の情報は、斜面に沿って滑るということであり、以下で与えられる。

$$\frac{a_y}{a_x - A_x} = \tan \theta \quad (2)$$

(ii)(2) に運動方程式 (1) を解いて得られる加速度を代入すると

$$\frac{mg - N \cos \theta}{N \sin \theta + \frac{m}{M} N \sin \theta} = \tan \theta \quad \therefore N = \frac{mMg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad (3)$$

この結果を運動方程式に代入すると

$$a_x = \frac{Mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad a_y = \frac{(m + M)g \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad A_x = -\frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4)$$

2 物体の相対加速度 (斜面方向) の大きさ a_r は

$$a_r = \sqrt{(a_x - A_x)^2 + (a_y)^2} = \frac{(m + M)g \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad (5)$$

物体 m が a から b に到達するまでにかかる時間を t とすると

$$\frac{h}{\sin \theta} = \frac{1}{2} a_r t^2 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{a_r \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2h(M + m \sin^2 \theta)}{(m + M)g \sin^2 \theta}} \quad (6)$$

[4]

(i) 運動方程式は摩擦力を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} ma &= \mu mg \\ MA &= -\mu mg \end{aligned} \quad (7)$$

(ii) 2 物体の相対加速度の大きさは運動方程式より

$$a_r = a - A = \mu g + \frac{m}{M} \mu g = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \mu g \quad (8)$$

よって 2 物体が一体となるまでの時間を t とすると

$$v_0 - a_r t = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0}{a_r} = \frac{Mv_0}{(M + m)\mu g} \quad (9)$$

2 つの物体の横方向の長さの差を l とすると、上にある物体 m が台座の物体 M からはみ出さずに一体になるためには

$$l \geq v_0 t - \frac{1}{2} a_r t^2 = \frac{Mv_0^2}{2(M + m)\mu g} \quad (10)$$

が満たされる必要がある。