勾配、発散、回転

1. 任意のスカラー場 ϕ, ベクトル場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ について以下の式を示せ。($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

$$\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\phi) = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\mathbf{E}) = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\mathbf{B}) = \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\mathbf{B}) - \Delta\mathbf{B}, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\ (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}. \tag{4}$$

ただし， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ は $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ のベクトル積をあらわす.

解答例

1. 直接計算で確かめられる．偏微分の可換性 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$ を用いる．(1) と (3) はベクトルの式であり，(2) と (4) はスカラーの式である．

(1) は，例えばその z 成分は，

$$\frac{\partial(\mathrm{grad}\phi)_y}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{grad}\phi)_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0.$$

(2) は，

$$\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0.$$

(3) は，例えばその z 成分は，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{B}))_z &= \frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{B})_y}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{B})_x}{\partial y}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}\\
&= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\\
&= \frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{B}}{\partial z}-\Delta B_z\\
&= (\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{B})-\Delta\mathbf{B})_z.
\end{aligned}$$

この関係式は，マクスウェル方程式から電磁波の波動方程式を導く際に用いられる．

(4) は,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_x}{\partial x}+\frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_y}{\partial y}+\frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_z}{\partial z}\\
&=\frac{\partial(E_yB_z-E_zB_y)}{\partial x}+\frac{\partial(E_zB_x-E_xB_z)}{\partial y}+\frac{\partial(E_xB_y-E_yB_x)}{\partial z}\\
&=\frac{\partial E_y}{\partial x}B_z+E_y\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial E_z}{\partial x}B_y-E_z\frac{\partial B_y}{\partial x}\\
&+\frac{\partial E_z}{\partial y}B_x+E_z\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial E_x}{\partial y}B_z-E_x\frac{\partial B_z}{\partial y}\\
&+\frac{\partial E_x}{\partial z}B_y+E_x\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial E_y}{\partial z}B_x-E_y\frac{\partial B_x}{\partial z}\\
&=B_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\\
&-E_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-E_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)-E_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\
&=B_x(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x+B_y(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y+B_y(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y-E_x(\mathrm{rot}\mathbf{B})_x-E_y(\mathrm{rot}\mathbf{B})_y-E_z(\mathrm{rot}\mathbf{B})_z\\
&=\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}.
\end{aligned}
$$

これはポインティングベクトルの性質を考察するときに使われる式である.

直接計算で示せるのはいいとしても，見通しがない，あるいはエレガントさに欠けるという不満もあるだろう．それを少しは解消する技法を紹介しよう．電磁気の習得には特に必要なく，蛇足である．ただし知っていれば便利である.

x, y, z の代わりに成分を $1, 2, 3$ でラベルする.

$\mathbf{E}=(E_1,E_2,E_3), \mathbf{B}=(B_1,B_2,B_3)$ について，内積は $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{3}E_iB_i$ である．これを単に E_iB_i と書くことにしよう．つまり同じ添え字が現れたら 1,2,3 にわたる和を実行するものと了解する.（ここでは 3 次元空間なので 3 成分だが，時間も含めた 4 次元空間での同様の規約をアインシュタインの規約という.）この規約のもとでは外積 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ の第 i 成分は

$$(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i=\varepsilon_{ijk}E_jB_k \tag{5}$$

とかける．ここで ε_{ijk} は数で，添え字が同じものがある場合は 0，すべての添え字が異なる場合は $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$, $\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=-1$ と値を定める．たとえば $(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_1=\varepsilon_{1jk}E_jB_k=\varepsilon_{123}E_2B_3+\varepsilon_{132}E_3B_2=E_2B_3-E_3B_2$ という具合．ε_{ijk} は添え字を偶置換しても不変で，奇置換すると符号を変える．外積の成分が添え字 123 について巡回的になっていることに注意.

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}=\varepsilon_{jki}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{kji}=-\varepsilon_{ikj}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl} \qquad \text{ただし } \delta_{ij}=1(\text{for } i=j),\quad \delta_{ij}=0(\text{for } i\neq j) \tag{7}$$

が成り立つ．規約により $\delta_{jm}E_j=E_m$ などとなる．微分についても成分を $1, 2, 3$ でラベルして $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$ を $(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ と書く．すると，勾配，発散，回転は次のようにあらわされる.

$$(\mathrm{grad}\phi)_i=\partial_i\phi,\quad \mathrm{div}\mathbf{E}=\partial_iE_i,\quad (\mathrm{rot}\mathbf{E})_i=\varepsilon_{ijk}\partial_jE_k \tag{8}$$

また， $\Delta = \partial_i \partial_i$ である．(3) の第 i 成分は

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\mathbf{B}))_i &\overset{(8)}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\mathrm{rot}\mathbf{B})_k \overset{(8)}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l B_m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l B_m \\
&\overset{(6)}{=} \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l B_m \overset{(7)}{=} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l B_m \\
&= \partial_i(\partial_j B_j) - (\partial_j\partial_j)B_i = \partial_i(\mathrm{div}\mathbf{B}) - (\Delta\mathbf{B})_i. \quad (\text{証了})
\end{aligned}
$$

(4) は,

$$
\begin{aligned}
\partial_i(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i &\overset{(5)}{=} \partial_i(\varepsilon_{ijk}E_j B_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i(E_j B_k) = \varepsilon_{ijk}(B_k\partial_i E_j + E_j\partial_i B_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_i E_j + \varepsilon_{ijk}E_j\partial_i B_k \overset{(6)}{=} \varepsilon_{kij}B_k\partial_i E_j - \varepsilon_{jik}E_j\partial_i B_k \\
&= B_k(\varepsilon_{kij}\partial_i E_j) - E_j(\varepsilon_{jik}\partial_i B_k) \overset{(8)}{=} B_k(\mathrm{rot}\mathbf{E})_k - E_j(\mathrm{rot}\mathbf{B})_j. \quad (\text{証了})
\end{aligned}
$$